Correction : Devoir surveillé n°4

MP Clemenceau 2022-23

Jeudi 1er décembre 2022

Problème de type CCP

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie **I**, où il est égal à 2.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique $((i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et I_n sa matrice unité.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$ ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme polynôme minimal de l'endomorphisme u, c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note φ_A l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A.
Les parties **I** et **II** étudie la diagonalisabilité de φ_A, les parties **III** et **IV** en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Etude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1) Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker(\varphi_A)$.

Correction : Par bilinéarité du produit matricielle l'application φ_A est clairement linéaire. Comme I_2 et A commutent avec A, on a directement que ce sont des éléments de $\ker(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2) Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction : par calcul directe, en faisant attention à l'ordre des vecteurs de la base, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3) Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée.

Correction : on utilise la matrice calculée à la question précédente : pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{\varphi_A}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & c & -b \\ 0 & \lambda & -c & b \\ b & -b & \lambda-a+d & 0 \\ -c & c & 0 & \lambda-d+a \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2\to C_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & c & -b \\ \lambda & \lambda & -c & b \\ 0 & -b & \lambda-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & \lambda-d+a \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2-L_1\to L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & c & -b \\ 0 & \lambda & 2c & -2b \\ 0 & -b & \lambda-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & \lambda-d+a \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2c & -2b \\ -b & \lambda-a+d & 0 \\ c & 0 & \lambda-d+a \end{vmatrix}$$

En développant, par exemple suivant la dernière ligne :

$$\chi_{\varphi_A}(\lambda) = \lambda\left(c2b(\lambda-a+d) + (\lambda-d+a)\left(\lambda(\lambda-a+d)+2cb\right)\right) = \lambda^2\left(\lambda^2 - \left((a-d)^2+4bc\right)\right)$$

4) En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2+4bc > 0$. **Correction :** par hypothèse A et I_2 ne sont pas liées et on a vu à la question **1)** que c'étaient des éléments du noyau de φ_A. On en déduit que 0 est une valeur propre d'ordre au moins 2.

Si $(d-a)^2+4bc > 0$ φ_A admet alors deux autres valeurs propres distinctes non nulles (de multiplicité 1), il est donc diagonalisable.

Si $(d-a)^2+4bc = 0$ alors 0 est la seule valeur propre et donc φ ne peut être diagonalisable que si c'est l'endomorphisme nulle, ce qui n'est pas le cas.

Si $(d-a)^2+4bc < 0$ alors χ_{φ_A} n'est pas scindé (dans $\mathbb{R}$) donc φ_A n'est pas diagonalisable.

Conclusion : φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2+4bc > 0$.

5) Montrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Correction : par hypothèse A n'est pas proportionnelle à I_2, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si A admet deux valeurs propres distinctes, c'est à dire si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racine simple, c'est à dire si et seulement si le discriminent de son polynôme caractéristique est strictement positif.

Or on a $\chi_A(X) = X^2 - tr(A)X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$. Donc A est diagonalisable si et seulement si $(a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$, ce qui est équivalent à $(a-d)^2+4bc > 0$.

A l'aide de la question précédente on conclut donc que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Etude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6) On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u, et, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Enfin, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$.

a) Exprimer, pour tout couple (i, j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

Correction : on a par calcul direct : $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)\, E_{i,j}$ (une multiplication à gauche par D multiplie les lignes, à droites les colonnes, on peut aussi le justifier en utilisant l'écriture de D dans la base canonique $(E_{i,j})$ avec $E_{k,l}E_{i,j} = \delta_{l,i}E_{k,j}$...)

b) Démontrer que, pour tout couple (i, j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A.

Correction : pour $(i, j) \in [\![1, ,]\!]\, n$, on a, à l'aide de la question précédente,

$$\varphi_A(B_{i,j}) = AB_{i,j} - B_{i,j}A = PDP^{-1}PE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}P^{-1}PDP^{-1} = P\,(DE_{i,j} - E_{i,j}D)\,P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)$$

Comme P est inversible et $E_{i,j}$ est non nul, on en déduit que $B_{i,j}$ est non nul. C'est donc bien un vecteur propre de φ_A.

c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

Correction : l'application qui à M associe PMP^{-1} est clairement un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que la famille $(B_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit, d'après la question précédente, que c'est une base de vecteurs propres de φ_A qui est donc diagonalisable.

7) On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable et tant qu'endomorphisme de de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i, j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

i) Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

Correction : φ étant initialement un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ses valeurs propres sont réelles.

ii) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

Correction : par propriété A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres. (Cela se démontre par la propriété du déterminant sur la transposée d'une matrice).

iii) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A.

On considère alors $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $Y \neq 0$, tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \overline{z}Y$.

En calculant $\varphi_A\,(X\,{}^tY)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

Correction : on a

$$\varphi_A\left(X\,{}^tY\right) = AX\,{}^tY - X\,{}^tYA = \lambda X\,{}^tY - X\,{}^t\left({}^tAY\right) = \lambda X\,{}^tY - X\,{}^t\,(\overline{z}Y) = (z - \overline{z})\,X\,{}^tY$$

Montrons que $X\,{}^tY$ est non nul pour pouvoir dire que c'est un vecteur propre et donc que $(z\overline{z})$ est une valeur propre de φ_A. Comme, par hypothèse, X et Y sont non nuls, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$. Or les coefficients de $X\,{}^tY$ sont les x_iy_j, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on en déduit que $X\,{}^tY$ est non nul. D'où le résultat.

b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

Correction : A étant un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elle admet au moins une valeur propre z complexe. Or, comme A est une matrice réelle, si z n'est pas réelle alors $\overline{z}$ est aussi une valeur propre de A. D'après la question **7ai)** les valeurs propres de φ_A sont réelles. Avec les notations de la question précédente on en déduit que $z - \overline{z}$ est réel. Or, pour tout complexe z, $z - \overline{z}$ est imaginaire pur, on en déduit que $z - \overline{z} = 0$ et par suite que z est réel.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c) Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

Correction : par définition on a $\varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$, c'est à dire $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$. On en déduit que

$$AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})\,P_{i,j}X$$

On obtient donc $\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}$.

d) En déduire que A est diagonalisable.

Correction : Par hypothèse la famille $(P_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (base de vecteurs propres de φ_A). X étant fixé et non nul on peut construire une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont X est le premier vecteur. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est entièrement déterminer par l'image d'une base par cet endomorphisme. Par isomorphisme on peut donc dire qu'une matrice M (de l'endomorphisme) est entièrement déterminée par l'image (produit par M) des vecteurs d'une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on peut donc trouver une matrice M telle que $MX = Y$. On en déduit que la famille $(P_{i,j}X)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut alors en extraire une base qui sera alors, d'après la question précédente, une base de vecteurs propres de A. A est alors diagonalisable.

Partie III. Etude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8) Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

Correction : *C'est une question de cours !.*

Commençons par montrer que c'est une famille libre. Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,m-1]\!]} \in \mathbb{R}^m$ telle que $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i = 0$.

On multiplie cette égalité par A^{m-1}. Comme $A^m = 0$ on obtient $\alpha_0 A^{m-1} = 0$. Or par hypothèse m est le degré du polynôme minimal donc $A^{m-1} \neq 0$. On en déduit que $\alpha_0 = 0$. On réitère en multipliant successivement par A^{m-i} pour i allant de 2 à m pour obtenir $\alpha_{i-1} = 0$. La famille est donc libre.

Montrons qu'elle est génératrice.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, d'après la division euclidienne de P par π_A, il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]$ tel $P = Q\pi_A + R$, avec $deg(R) < m$. On obtient alors $P(A) = R(A)$ et donc $P(A)$ est une combinaison linéaire de la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$.

Conclusion : la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est donc une base de $\mathbb{R}[A]$.

9) Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\ker(\varphi_A))$.

Correction : tout polynôme en A commute avec A, donc pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ est un élément du noyau de φ_A. On en déduit que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans le noyau de φ_A.

Par propriété sur la dimension, comme $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker(\varphi_A)$, on a $\dim(\mathbb{R}[A]) \leqslant \dim(\ker(\varphi_A))$, d'où $m \leqslant \dim(\ker(\varphi_A))$.

10) *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Correction : soit $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$. En composant cette égalité successivement par u^{n-k} pour k allant de 1 à n, obtient successivement $a_{n-k+1}e_{n-k+1} = a_{n-k+1}u^{n-1}(y) = 0$, d'où $a_{n-k+1} = 0$. La famille est alors une famille libre de n vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que, si $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, avec $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$, alors $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

Correction : on va montrer que $v(e) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(e)$ pour tout vecteur e de la base précédente.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$ on a, comme v est un élément du noyau de φ_A et donc commute avec u :

$$v(e_j) = v\left(u^{n-j}(y)\right) = u^{n-j}\left(v(y)\right) = u^{n-j}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = u^{n-j}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(y)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}\left(u^{n-j}(y)\right) = \sum_{i=1}^{n}$$

d'où le résultat.

c) En déduire $\ker(\varphi_A)$.

Correction : d'après la question précédente et la question **9)** on a directement que $\ker(\varphi_A) = \mathbb{R}[A]$.

11) *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ le sous espace propre associé à la valeur propre λ_k.

On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker(\varphi_A)$ si et seulement si , pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v.

Correction : par propriété si deux endomorphismes commutent alors les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Or B est un élément du noyau de φ_A si et seulement si il commute avec A. C'est à dire si et seulement si v commute avec u. On en déduit que si B est un élément du noyau alors pour tout i $[\![1,p]\!]$ $E_u(\lambda_i)$ est stable par v.

Réciproquement : on suppose que tout sous espace propre de u est stable par v.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $(x_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ une famille de vecteurs propres de u telle que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$. On a alors

$$v \circ u(x) = v\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(u_k)$$

or, comme $E_u(\lambda_k)$ est stable par v, on a alors, pour tout k, $u(v(x_k)) = \lambda_k v(x_k)$. On en déduit que $v \circ u(x) = u \circ u(x)$. Donc u et v commutent.

b) En déduire que $B \in \ker(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de sous espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

Correction : par propriété sur une somme directe de sous espaces stables, B est un élément de $\ker(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice dans une base adaptée à la somme directe est alors diagonale par blocs, où chaque bloc est la matrice de l'endomorphisme induit par v sur le sous espace propre, c'est donc une matrice d'ordre m_k

c) Préciser la dimension de $\ker(\varphi_A)$.

Correction : Un élément de de $\ker(\varphi_A)$ est entièrement défini par les blocs décris dans la question précédente, on en déduit la dimension de $\ker(\varphi_A)$ qui est alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k^2$

d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k.

Partie IV. Etude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé. On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

Correction : montrons par récurrence sur k, que pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.
Pour $k = 0$, $B^0 = I_n$ et donc, d'après la première question $\varphi_A(I_n) = 0 = 0\alpha B^0$. Pour $k = 1$, cela vient de la définition de B : vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre α.
Soit $k \in \mathbb{N}$ on suppose que $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$. On a alors

$$\varphi_A\left(B^{k+1}\right) = AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^kB - B^kAB + B^kAB - B^{k+1}A = \varphi_A(B^k)B + B^k\varphi_A(B)$$

On a alors par hypothèse de récurrence et définition de B, $\varphi_A\left(B^{k+1}\right) = \alpha\left(k+1\right)B^{k+1}$.
Le théorème de récurrence s'applique et le résultat est vrai pour tout entier k.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

Correction : soit $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![1,m]\!]} \in \mathbb{R}^m$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i X^i$. On a alors par linéarité de φ_A, et d'après la question précédente

$$\varphi_A(P(B)) = \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_A(B^i) = \sum_{i=0}^{m} a_i i\alpha B^i = \sum_{i=1}^{m} a_i i\alpha B^i = \alpha B \sum_{i=1}^{m} a_i i B^{i-1}$$

Or $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i i B^{i-1}$, donc $\varphi_A(P(B)) = \alpha BP'(B)$.

14) Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul.

Correction : en considérant $P = \pi_B$ dans la question précédente, on obtient que $X\pi_B'$ est aussi un polynôme annulateur de B. Il est donc un multiple de π_B Or $X\pi_B'$ est de même degré que π_B il lui est donc associé. Or le coefficient dominant de $X\pi_B'$ est d et π_B est unitaire. On en déduit que $X\pi_B' = d\pi_B$ et donc $X\pi_B' - d\pi_B = 0$.

15) En déduire que $B^d = 0$.

Correction : d'après la question précédente, $X\pi_B' = d\pi_B$. On en déduit que si λ est une racine non nulle de π_B d'ordre k alors elle est aussi racine d'ordre k de π_B', ce qui est absurde. On en déduit que la seule racine de π_B est 0 et donc $\pi_B = X^d$ et par suite $B^d = 0$.

Problème de type CentraleSupélec

Rappels, notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n. De plus :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ;
- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $A_{i,j}$ le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j ;
- pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha, \beta)$ est la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$;
- si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_p)$ sont dans $\mathbb{R}^p$, on désigne par $\mathrm{diag}\,(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \cdots, M(\alpha_p, \beta_p))$ la matrice de $\mathcal{M}_{2p}$ définie par blocs carrés d'ordre 2 dont les seuls blocs éventuellement non nuls sont les blocs diagonaux $M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \cdots, M(\alpha_p, \beta_p)$;
- I_n est la matrice unité élément de $\mathcal{M}_n$;
- On rappelle les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et leur codage :

opérations	codage
échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
multiplication de la ligne i par $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
ajout de la ligne j, multipliée par le scalaire λ, à la ligne i ($i \neq j$)	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si E est la matrice obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, alors EA (resp.AE) est la matrice obtenue à partir de A en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) de A (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On confond respectivement :
- matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) canoniquement associé,
- vecteur de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) et matrice colonne de ses coordonnées,
- matrice de taille 1 et scalaire la constituant.

On rappelle qu'une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $s^2 = s \circ s = Id_{\mathbb{R}^n}$; il existe alors deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que s soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, définie par : $s|_{E_1} = Id_{E_1}$ et $s|_{E_2} = -Id_{E_2}$.
Préciser la symétrie , c'est déterminer les sous-espaces E_1 et E_2 associés.

On note (P_A) la propriété : (P_A) $\quad$ A ne possède pas de valeur propre réelle
Le but de ce problème est d'étudier des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P_A). Après avoir établi quelques résultats préliminaires, on étudie des cas particuliers dans les parties I et II et un cas plus général dans la partie III.

Résultats préliminaires

1) On se propose de démontrer le résultat suivant :
« deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».
Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

(a) Montrer qu'il existe (R, J) éléments de $\mathcal{M}_n$ tels que $P = R + \imath J$ avec $\imath^2 = -1$.

Correction : Notons R (resp. J) la matrice dont le coefficient générique est la partie réelle (resp. imaginaire) de P. On a alors $P = R = iJ$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$

Correction : $AP = PB$ devient, avec les notations de la question précédente,

$$AR + iAJ = RB + iJB$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de chaque coefficient, on a donc $AR = RB$ et $AJ = JA$. En combinant ces relations, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{C},\ A(R+tJ) = AR + tAJ = RB + tJB = (R+tJ)B$$

(c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathrm{IR}$ tel que $\det(R + t_0 J) \neq 0$.
Correction : L'application $t \in \mathbb{C}R + tJ$ a des fonctions coordonnées qui sont polynomiales. Avec la formule théorique du déterminant, on en déduit que $\phi : t \mapsto det(R+tJ)$ est aussi polynomiale. Or, $\phi(i) = det(P) \neq 0$ et ϕ n'est pas nulle. Sa restriction à IR n'est donc pas nulle (un polynome admettant une infinité de racines est nul). On a donc

$$\exists\, t_0 \in \mathrm{IR}/\ R + t_0 J \in GL_n(\mathrm{IR})$$

(d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$.
Correction : Soit $Q = R = t_0 J$. La question 1.b montre que $AQ = QB$ et, comme Q est inversible,

$$Q^{-1}AQ = B$$

ce qui montre que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$.

2) (a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.
Correction : Soit $P \in \mathrm{IR}[X]$. C'est une fonction polynomiale donc continue sur IR. La condition sur le degré montre qu'en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction admet des limites infinies de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires indique alors que P s'annule sur IR.
Remarque : alternativement, il existe un nombre impair de racines complexes comptées avec les multiplicités. Comme ces racines sont deux à deux conjuguées, il doit y en avoir une réelle.

(b) En déduire que s'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ vérifiant (P_A) , alors n est pair
Correction : Si n est impair et $A \in \mathcal{M}_n$ son polynôme caractéristique est réel de degré impaire et possède une racine réelle. Il y a donc une valeur propre réelle. En contraposant ceci, on voit que n doit être pair quand (P_A) est vérifiée.
Dans toute la suite du problème, on suppose n pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathrm{IN} \setminus \{0\}$.

Première partie

I.A) Dans cette section I.A., on se place dans IR^2 et on désigne par (e_1, e_2) la base canonique, avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

3) On considère la matrice $M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on désigne par u l'endomorphisme associé.

a) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de s_1, symétrie par rapport à la droite $\mathrm{IR}e_1$ parallèlement à la droite $\mathrm{IR}e_2$.

Correction : On a $s(e_1) = e_1$ et $s(e_2) = -e_2$ et donc $Mat(s_1, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de l'application $u \circ s_1$. En déduire qu'il existe une symétrie s_2, qu'on précisera, telle que $u = s_2 \circ s_1$.
Correction : Par propriété de la matrice d'une composée on a alors que $Mat(u \circ s_1, (e_1, e_2)) = M(0,1)Mat(s_1, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit s_2 l'endomorphisme tel que $Mat(s_2,(e_1,e_2)) = \begin{pmatrix} O & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Comme $A^2 = I_2$, s_2 est une symétrie et $u = (u \circ s_1) \circ s_1 = s_2 \circ s_1$.

De plus s_2 est la symétrie par rapport à $Vect(e_1 + e_2)$ parallèlement à $Vect(e_1 - e_2)$.

4) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est semblable à $M(0,1)$ et donner une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que $M(0,1) = P^{-1}AP$.

Correction : On cherche une base (f_1, f_2) telle que $u(f_1) = f_2$ et $u(f_2) = -f_1$. La première condition amène à poser (on prend $f_1 = e_1$ ce qui impose f_2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. P est inversible ($det(P) = 1$) et comme $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a donc $P^{-1}AP = M(0,1)$.

b) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Correction : On peut écrire, avec $I.A$, que $M(0,1) = A_2A_1$ avec A_2 et A_1 matrices de symétrie. On a donc

$$A = S_2S_1 \text{ avec } S_2 = PA_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } S_1 = PA_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme $A_2^2 = A_1^2 = I_2$, on a aussi $S_1^2 = S_2^2 = I_2$ et S_1, S_2 sont des matrices de symétrie.

Soit α et β des nombres réels tels que $\beta^2 - \alpha^2 = 1$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

c) Montrer que B est semblable à $M(0,1)$ et donner une matrice Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M(0,1) = Q^{-1}BQ$. *on pourra calculer* Be_1.

Correction : La méthode est la même qu'en $2.a$. On note cette fois $Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Q est inversible car $\beta \neq 0$ (sinon on aurait $\alpha^2 = -1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ce qui est exclus) et $B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ indique alors que

$$Q^{-1}BQ = M(0,1)$$

d) Montrer que B est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

Correction : Avec les notation de la question $2.c$, on a donc

$$B = T_2T_1 \text{ avec } T_2 = PA_2P^{-1} \text{ et } T_1 = PA_1P^{-1}$$

Comme $A_2^2 = A_1^2 = I_2$, on a aussi $T_1^2 = T_2^2 = I_2$ et T_1, T_2 sont des matrices de symétrie.

5) question à ne pas traiter mais à admettre.On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tels que $\beta^2 + \alpha^2 = 1$.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

Correction : Il existe un réel θ tel que $\alpha = cos(\theta)$ et $\beta = sin(\theta)$. $M(\alpha,\beta)$ est alors la matrice dans la base (e_1, e_2) (qui est orthonormée directe pour la structure euclidienne canonique) de la rotation d'angle θ. Cette rotation se décompose comme le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites formant un angle $\theta/2$ (par exemple $s_2 \circ s_1$ avec s_1 symétrie par rapport à la droite d'angle polaire 0 et s_2 symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$).

6) On considère à présent la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\beta^2 + \alpha^2 \neq 0$. Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

Correction : Soit $N = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} M(\alpha,\beta)$. N est du type de la question précédente et s'écrit donc $N = S_2 S_1$ avec S_1, S_2 matrices de symétrie. On a donc

$$M = S_2 S_1 H \quad \text{avec} \quad H = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} I_2$$

et H est une matrice d'homothétie.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de A pour que (P_A) soit réalisée.

Correction : Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$$

La condition (P_A) est vérifiée si et seulement si χ_A n'a pas de racines réelles, c'est à dire si son discriminant est < 0. La condition est donc

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$$

(b) En supposant que A vérifie (P_A), et en étudiant la diagonalisation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de A , montrer qu'il existe une unique matrice, semblable à A , du type $M(\alpha,\beta)$ avec α réel et β réel strictement positif. Expliciter α réel et β en fonction de a, b, c, et d .

Correction : Supposons (par conditions nécessaires) que A soit semblable à $M(\alpha,\beta)$. Trace et déterminant étant des invariants de similitude, on a

$$2\alpha = a+d \quad \text{et} \quad \alpha^2+\beta^2 = ad-bc$$

Avec la condition vue en $5.a$, on a donc un unique couple envisageable (α,β) de réels tels que $\beta > 0$ et c'est

$$\alpha = \frac{a+d}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}$$

Réciproquement, soit α et β comme ci-dessus. $M(\alpha,\beta)$ est une matrice réelle semblable à A. Par ailleurs, $M(\alpha,\beta)$ et A ont même polynôme caractéristique (par choix de α et β). Ce dernier étant scindé à racines simples, elles sont diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité, elles sont semblables dans $\mathbb{C}$. La partie préliminaire montre qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_2$.

(c) Que peut-on dire de $\det(A)$ si A vérifie (P_A) et est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Correction : Le déterminant étant un invariant de similitude, on a

$$det(A) = det(M(\alpha,\beta)) = \alpha^2+\beta^2 > 0$$

(d) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

Correction : Avec la question $IA4$ on a l'existence de S_1, S_2 matrice de symétrie et de H matrice d'homothétie telles que $M = S_2 S_1 H$. En notant P une matrice réelle telle que $P^{-1}AP = M(\alpha,\beta)$ (P existe avec $5b$) on a donc

$$A = T_1 T_2 H \quad \text{avec} \quad T_i = P S_i P^{-1}$$

et $T_i^2 = 1$.

I.B) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = I_p$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 2B & -5B \\ B & -2B \end{pmatrix}$$

8) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, des entiers naturels q et r tels que $Q^{-1}BQ$ soit sous la forme d'une matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$

On convient que cette matrice vaut I_p lorsque $r = 0$ et $q = p$ et qu'elle vaut $-I_p$ lorsque $q = 0$ et $r = p$.

Correction : Comme $B^2 = I_p$, B est la matrice dans la base canonique d'une symétrie. Notons E_1 et E_2 les sous-espaces associés à B et $\mathcal{C}$ une base adaptée à $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^p$. La matrice de la symétrie est représentée dans $\mathcal{C}$ par $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$ où q est la dimension de E_1 et r celle de E_2. Matriciellement, cela signifie qu'en notant Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$ on a $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$

On peut aussi raisonner à l'aide du théorème de décomposition des noyaux qui donne $\mathbb{R}^p = \ker(B - I_p) \oplus \ker(B + i_p)$ et prendre une base adaptée à la somme directe.

9) Déterminer une matrice par blocs P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et constituée de multiples de I_p telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$

Correction : Par analogie avec IA, on introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} I_p & 2I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. On vérifie (calcul par blocs) que P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & -2I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Un nouveau calcul par blocs donne $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$

10) En déduire que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$

Correction : Notons cette fois $R = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ où Q est la matrice de $B.1$. R est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1}BQ \\ Q^{-1}BQ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Par transitivité, A est semblable à la matrice du membre de droite (par le biais de la matrice de passage PR).

11) Montrer alors que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice du type diag $(M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1))$.

Correction : Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à B. La question précédente donne l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_{2p})$ telle que

$$Mat(u, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\mathcal{D} = (e_1, e_{p+1}, e_2, e_{p+2}, \dots, e_q, e_{p+q}, e_{p+q+1}, e_{q+1}, e_{p+q+2}, e_{q+2} \dots, e_{2p}, e_{p-1})$$

C'est une base de $\mathbb{R}^{2p}$ (on n'a fait que réordonner les termes de $\mathcal{C}$) telle que

$$Mat(u, \mathcal{D}) = diag(M(0,1), M(0,1), \dots, M(0,1))$$

A est donc semblable à cette dernière matrice.

12) Exemple : on considère dans $\mathcal{M}_4$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice inversible M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^{-1}AM = \text{diag}\,(M(0,1), M(0,1))$.

(b) En utilisant la technique vue à la question **I.A.1**, montrer que A est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Correction : Ici, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = 1$. $(-3,1)$ et $(-1,1)$ sont vecteurs propres associés à 1 et -1. On a donc $Q = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ PR = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On réordonne les colonnes pour obtenir

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $IA1$, on a donc

$$M^{-1}AM = diag(S_2S_1, S_2S_1) = diag(S_2, S_2)diag(S_1, S_1) \text{ avec } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $A = T_2T_1$ avec

$$T_2 = Mdiag(S_2, S_2)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ T_1 = Mdiag(S_1, S_1)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 & -12 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

T_1 et T_2 sont bien des matrices de symétries (carré égal à I_4).

Deuxième partie

II.A) Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

13) Montrer que (P_A) est réalisée.

Correction : X^2+1 annule A. Les valeurs propres de A sont racines de X^2+1 et ne sont pas réelle. (P_A) est vérifiée.

14) Si E est obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, comment déduit-on EAE^{-1} de A ? On distinguera les trois opérations élémentaires codées sous la forme

a) $L_i \leftrightarrow Lj$,

b) $L_i \leftarrow \alpha Li$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

c) $L_i \leftarrow Li + \lambda Lj$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction : Soit E une matrice d'opération élémentaire.

a. Si cette opération est $L_i \leftrightarrow L_j$ alors on passe de E à I_n faisant l'pération $C_i \leftrightarrow C_j$. E^{-1} correspond donc à cette opération. Ainsi, EAE^{-1} s'obtient à partir de A en changeant les lignes i et j puis les colonnes i et j.

b. Si cette opération est $L_i \leftarrow \alpha L_i$ alors alors on passe de E à I_n en faisant l'opération $C_i \leftarrow \alpha^{-1} C_i$. E^{-1} correspond donc à cette opération. EAE^{-1} s'obtient à partir de A en multipliant la ligne i par α puis la colonne i par α^{-1}.

c. Si cette opération est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ alors alors on passe de E à I_n en faisant l'opération $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$. E^{-1} correspond donc à cette opération. EAE^{-1} s'obtient à partir de A en effectuant successivement $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ puis $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.

15) (a) En utilisant **II.A.1**, montrer qu'il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

Correction : Le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ n'étant pas un vecteur propre (puisqu'il n'y a aucun vecteur propre réel), la première colonne de A n'est pas colinéaire à e_1. Ainsi, il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

(b) En utilisant des opérations élémentaires, en déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que si $A' = PAP^{-1}$ alors $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 1$.

Correction : Soit $i \geq 2$ un indice tel que $A_{i,1} \neq 0$. Soit E_1 la matrice correspondant à $L_i \leftrightarrow L_2$. La matrice $B = E_1 A E_1^{-1}$ sera telle que $B_{2,1} = A_{i,1} \neq 0$ (on échange les lignes 2 et i ce qui amène le coefficient en place puis on permute C_2 et C_i ce qui ne change pas la colonne 1 et laisse le coefficient en place.

Soit E_2 la matrice de l'opération $L_2 \leftarrow B_{2,1}^{-1} L_2$ et $C = E_2 B E_2^{-1}$. On a alors $C_{2,1} = 1$ (on multiplie la ligne 2 pour obtenir un coefficient 1 puis on change la colonne 2 ce qui laisse le 1 en place).

Soit E_3 la matrice de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - C_{1,1} L_2$ et $D = E_3 C E_3^{-1}$. On a alors $D_{1,1} = 0$ et $D_{2,1} = 1$ (on opère sur la ligne 1 pour amener un 0 puis sur la colonne 2 ce qui laisse en place le 0 et le 1).

On continue avec des matrices d'opérations élémentaires $E_4, \ldots, E_{n+1}$ du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_2$ pour obtenir

$$A' = PAP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = E_{n+1} E_n \ldots E_1$$

avec $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 0$.

Remarque : bien plus simplement, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a $(e_1, u(e_1))$ qui est libre et peut être complétée en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, u est représentée par une matrice du type voulu. En passant aux matrices, on obtient la similitude demandée.

(c) Montrer alors que $A'_{i,2} = 0$ si $i \neq 1$ et $A'_{1,2} = -1$.

Correction : Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à A'. On a $v(e_1) = e_2$. Par ailleurs,

$$A'^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}(-I_n)P = -I_n$$

et donc $v(e_2) = v^2(e_1) = -e_1$. La seconde colonne de A' est donc $(-1, 0, \dots, 0)$.

16) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que $QA'Q^{-1}$ soit de la forme par blocs $\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$.

Correction : Soit F la matrice d'une opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 + \lambda C_2$ et $B = F^{-1}A'F$. A'' est obtenue en effectuant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + \lambda C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_3$. Etant donnée la forme des deux premières colonnes de A', la matrice A'' aura encore des colonnes comme A'. En choisissant $\lambda = A'_{1,3}$, elle vérifiera en outre $B_{1,3} = 0$.
On itère le processus pour obtenir une matrice B semblable à A' et de la forme suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & ? & \dots & ? \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & ? & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = -I_n$ et B semblable à A, on a $B^2 = -I_n$. En regardant la première ligne de B^2, ceci impose que $B_{2,i} = 0$ si $i \geq 3$. On a donc une matrice de la forme voulue semblable à A' et donc à A.
Remarque : avec les notations ci-dessus, on a $A''_{1,i} = A'_{1,i}$ pour $i \geq 4$. Il est ainsi facile de voir quelles opérations on doit effectuer. Si on considère la matrice $R = F_3 \dots F_n$ où F_i est la matrice de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + A'_{1,i}C_2$, on a

$$R^{-1}A'R = B$$

La matrice Q de l'énoncé est donc égale à $R^{-1} = F_n^{-1} \dots F_3^{-1}$. Notons que F_i^{-1} est la matrice de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - A'_{1,i}L_i$. A ce niveau, on obtient

$$ZAZ^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où Z est un produit de matrices correspodant à des opérations élémentaires sur les lignes. On obtient Z en effectuant ces opérations à partir de I_n.

17) Montrer que A est semblable à une matrice du type diag $M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1)$.

Correction : Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$$

Or, on sait que cette matrice vaut $-I_n$. On a donc $B^2 = -I_{n-2}$. On est amenés à faire une récurrence sur p (avec $n = 2p$).

- Si $p = 1$ alors $n = 2$ alors on a déjà le résultat voulu avec $A.4$ (B est un bloc de taille nulle).
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $p - 1 \geq 1$. Avec $A3$ et $A4$ on trouve N et B telles que

$$NAN^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B^2 = -I_{n-2}$$

L'hypothèse de récurrence donne P telle que PBP^{-1} est bloc-diagonale avec des blocs de $M(0,1)$. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible d'inverse $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et on a

$$QNAN^{-1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & PBP^{-1} \end{pmatrix} = diag(M(0,1), \ldots, M(0,1))$$

ce qui clôt la récurrence.

18) *Exemple :* en utilisant la méthode décrite dans cette partie, trouver une matrice M inversible de telle que $MAM^{-1} = \operatorname{diag} M(0,1), M(01)$ où A est la matrice de la question **I.B.5** . On fera apparaître clairement les opérations élémentaires utilisées.

Correction : Avec la question 3.b, on effectue successivement les opérations

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2},\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

et on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -5/2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec la question 4, on effectue alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_4$ et on obtient

$$Z^{-1}AZ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le travail avec le bloc de taille 2 inférieur gauche donne les opérations

$$L_4 \leftarrow -2L4, L_3 \leftarrow L_3 - L4$$

On obtient finalement

$$MAM^{-1} = diag(M(0,1), M(0,1)) \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

II.B) Dans cette sous partie A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

19) Montrer que A vérifie (P_A).

Correction : $(X - \alpha)^2 + \beta^2$ est un polynôme qui annule A et qui n'a pas de racines réelles (car $\beta > 0$). A n'a donc pas de valeur propre réelle et (P_A) est vérifiée.

20) Montrer que A est semblable à la matrice d'ordre n $\operatorname{diag} M(\alpha, \beta), M(\alpha, \beta), \cdots, M(\alpha, \beta)$. Que peut-on dire de $\det(A)$?

Correction : La matrice $C = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I)$ vérifie $C^2 = -I_n$. On peut trouver M telle MCM^{-1} est bloc-diagonale avec des blocs égaux à $M(0,1)$. On en déduit alors que

$$MAM^{-1} - \alpha I_n = M(\beta C)M^{-1} = \beta MCM^{-1} = diag(M(0,\beta), \ldots, M(0,\beta))$$

et donc

$$MAM^{-1} = \alpha I_n + diag(M(0,\beta),\dots,M(0,\beta)) = diag(M(\alpha,\beta),\dots,M(\alpha,\beta))$$

et on a la similitude voulue. Le déterminant est un invariant de similitude et on sait calculerles déterminants bloc-diagonaux. On obtient

$$det(A) = det(M(\alpha,\beta))^p = (\alpha^2+\beta^2)^p > 0$$

II.C) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $u(P)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad , u(P)(x) = x^{n-1}P\left(\frac{-1}{x}\right)$$

21) Déterminer pour quelles valeurs de i et j dans $\{0,\cdots,n-1\}$, le plan $Vect(X^i,X^j)$ est stable par u.

Correction : $\forall i,\ u(X^i) = (-1)^i X^{n-1-i}$. Le plan $Vect(X^i,X^j)$ est stable par u ssi

$$n-1-i, n-1-j \in \{i,j\}$$

n étant pair, on ne peut avoir $n-1-i = i$ ou $n-1-j = j$. La condition cherchée est ainsi

$$i+j = n-1$$

22) En déduire que la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{n+1-i,i} = (-1)^{i-1}$ si $1 \le i \le n$, les autres coefficients de A étant nuls, est semblable à diag $M(0,1), M(0,1),\cdots,M(0,1)$.

Correction : Avec le calcul ci-dessus, on a

$$u\circ u(X^i) = u((-1)^i X^{n-1-i}) = (-1)^i(-1)^{n-1-i}X^{n-1-(n-1-i)} = -X^i$$

et donc $u^2 = -Id$. La partie $II.A$ indique que la matrice de u dans n'importe quelle base ests emblable à $diag(M(0,1),\dots,M(0,1))$. Or, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, cette matrice est la matrice A proposée (tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur l'antidiagonale où alternent des -1 et des 1). On a ainsi le résultat demandé.

Troisième Partie

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (P_A). On se propose de montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

i) A est semblable à une matrice du type diag $M(\alpha_1,\beta_1), M(\alpha_2,\beta_2),\dots,M(\alpha_p,\beta_p)$ avec $(\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ pour $1 \le k \le p$.

ii) Il existe un polynôme réel à racines simples complexes non réelles annulé par A.

iii) Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 stable par A possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A.

III.A) Dans cette sous partie **III.A**, on montre que (i)⇒(ii).

23) Montrer que si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, le polynôme $(X-\alpha)^2+\beta^2$ ne possède que des racines simples complexes non réelles.

Correction : Pour tout réel x, $(x-\alpha)^2+\beta^2 \ge \beta^2 > 0$. Le polynôme n'admet pas de racines réelles. Il admet donc deux racines complexes non réelles et conjuguées (n'eétant pas réelles, elles sont distinctes).

24) En déduire que (i)⇒(ii).
Correction : Si (1) a lieu alors le polynôme caractéristique de A (invariant de similitude) est

$$\prod_{k=1}^{p}\left((X-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right)$$

Par théorème de Cayley-Hamilton, il annule A et la question précédente montre qu'il n'admet pas de racines réelles. Il faut cependant raffiner car les racines ne sont pas forcément simples (par exemple, deux couple (α_k, β_k) peuvent être égaux).
Notons $P_k = (X-\alpha_k)^2+\beta_k^2$. Deux polynômes P_k sont soit égaux soit sans racine commune (sinon les deux racines, qui sont conjuguées, sont communes et comme les polynômes sont unitaires de degré 2 ils sont égaux). Soit P le produit des P_k deux à deux distincts. On a (produit par blocs)

$$P\left(diag(M(\alpha_1,\beta_1),\dots,M(\alpha_p,\beta_p))\right) = diag(P(M(\alpha_1,\beta_1)),\dots,P(M(\alpha_p,\beta_p)))$$

P étant multiple de chaque P_k, la matrice ci-dessus est nul. P est donc annulateur de A (puisqu'il annule une matrice semblable à A) et il ne possède que des racines complexes non réelles et simples.

III.B) Dans cette section **III.B**, on montre que (ii)⇒(iii). On suppose donc que A vérifie (ii). Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 et stable par A. Soit (f_1, f_2) une base de E que l'on complète en une base $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

25) Montrer que dans la base $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a une matrice s'écrivant par blocs : $\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Correction : Les images de f_1 et f_2 par u (endomorphisme canoniquement associé à A) sont des combinaisons linéaires de f_1 et f_2. Or, la matrice de u dans la base des f_i contient en colonne les images des f_i dans la base des f_i. Les deux premières colonnes de cette matrices sont donc du type $(?, ?, 0, \dots, 0)$ et on a le résultat demandé.

26) Vérifier que A' ne possède pas de valeur propre réelle et en déduire que A' est semblable à une matrice du type $M(\alpha,\beta)$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
Correction : Un produit par blocs montre que

$$\chi_A = \chi_{A'}\chi_B$$

où χ_M désigne le polynôme caractéristique de M. Toute valeur propre de A' est donc valeur propre de A. Or, A ne possède pas de valeur propre réelle et il en est donc de même pour A'. La question $IA5b$ donne alors A' semblable à une matrice du type $M(\alpha,\beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$.

27) Montrer que E est inclus dans $\ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$.
Correction : A' est la matrice dans (f_1, f_2) de la restriction de u (endomorphisme canoniquement associé à A) au sous-espace stable E. Or, $P = \chi_{A'} = \chi_{M(\alpha,\beta)} = (X-\alpha)^2+\beta^2$ annule A' et on a donc

$$Ker(P(A')) = E$$

Or, $P(A')$ est la restriction à E de $P(A)$ et donc son noyau est inclus dans celui de $Ker(P(A))$ (on a même $Ker(P(A')) = Ker(P(A)) \cap E$). Ainsi,

$$E \subset Ker(P(A)) = Ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$$

28) Montrer que $\ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$ possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A dans $\mathbb{R}^n$.
Correction : Avec le polynôme annulateur à racines simples dans $\mathbb{C}$ on peut conclure à l'aide du théorème des noyau (ce polynôme s'écrit $((X-\alpha)^2+\beta^2)Q$ les deux facteurs étant premiers entre eux).

29) En utilisant une technique analogue à celle vue dans les parties **II.A.3** et **II.A.4**, montrer que E possède un supplémentaire stable par A dans $\ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$, puis conclure que(iii) est réalisé.

Correction : Raisonnons en termes d'endomorphismes. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit v sa restriction au sous-espace stable $Ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$ et $w=\frac{v-\alpha Id}{\beta}$. On a alors $w^2=-Id$. f_1 n'est pas vecteur propre pour w et $(f_1, w(f_1))$ est libre. C'est aussi une famille de E (stable par u et donc par v et w). Par cardinal, c'est une base de E. Posons donc $f_2=w(f_1)$ (c'est possible). On peut compléter (f_1,f_2) de façon à obtenir une base $(f_1,\ldots,f_r)$ de $Ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$. Dans cette base, la matrice de w est du type $M=\begin{pmatrix} M(0,1) & ? \\ 0 & C\end{pmatrix}$.
En notant E_i la matrice de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i+M_{1,i}C_2$ et $P=E_3\ldots E_r$ on a $P^{-1}MP=\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & C'\end{pmatrix}$. La matrice P vaut $I_r+\sum_{k=3}^r M_{1,k}E_{2,k}$. Elle correspond à une matrice de passage de (f_i) dans une base du type $(f_1,f_2,g_3,\ldots,g_r)$. $Vect(g_3,\ldots,g_r)$ est alors un suplémentaire de E dans $Ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$ qui est stable par w (d'après la forme de la matrice) et donc aussi par v et donc aussi par u.
Finalement, en notant H un supplémentaire stable par A de $Ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $Vect(g_3,\ldots,g_r)\oplus H$ est un supplémentaire de E stable par A.

III.C)

30) En raisonnant par récurrence, montrer que (iii)$\Rightarrow$(i).

Correction : On procède par récurrence sur p ($n=2p$) que si A vérifie iii et est telle que P_A est vraie alors on peut trouver une base "adaptée" (dans laquelle l'endomorphisme est représentée par une matrice du type voulu).

- Si $p=1$ alors $n=2$ et on conclut par $IA5$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $p-1\geq 1$.
  Commençons par remarquer qu'il existe un plan stable par A.
  En effet, il existe une valeur propre complexe $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$. Soit x un vecteur propre complexe associé. Comme A est réelle, $\overline{\lambda}$ est valeur propre et $\overline{x}$ est vecteur propre associée. Soit x_1+ix_2 la décomposition de x à l'aide de vecteurs réels. On a
  $$Ax_1+iAx_2=Ax=\lambda x=\lambda_1x_1-\lambda_2x_2+i(\lambda_1x_2+\lambda_2x_1)$$
  En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient que $Ax_1, Ax_2\in Vect(x_1,x_2)$. $Vect(x_1,x_2)$ est stable, de dimension ≥ 1 ($x\neq 0$). Or, A ne possède pas de droite réelle stable (avec (P_A)) et notre espace est donc de dimension 2.
  Soit P un tel plan stable. Avec (iii) on a un supplémentaire stable F. A induit sur F un endomorphisme B et (P_B) est vérifiée (les valeurs propres d'une restriction étant valeurs propres de l'endomorphisme de départ). Montrons que B vérifie (iii). Soit Q un plan de F sstable par B. Il est donc stable par A et il existe un supplémentaire H stable par A. On a $Q\oplus H=E$ et on montre que
  $$Q\oplus(H\cap F)=F$$
  En effet, la somme est clairement directe cat celle entre Q et H l'est. La somme est incluse dans F car Q et $H\cap F$ le sont. Enfin, si $x\in F$ on peut trouver $y\in Q$ et $z\in H$ tels que $x=y+z$. On a alors $z=x-y\in F$ et donc $z\in H\cap F$. Ainsi, $F\subset Q\oplus(F\cap H)$.
  Comme H et F sont stables par A, il en est de même de $H\cap F$ et comme $H\cap F\subset F$, on peut dire que c'est un sous-espace stable par B et il est supplémentaire de Q. B vérifie bien (iii).
  Par hypothèse de récurrence, on peut appliquer le résultat à B et trouver une base de F adaptée. De même, on peut trouver une base de P adaptée (avec l'initialisation et comme la restriction de A à P vérifie l'hypothèse sur les valeurs propres). La concaténée des bases de F et P donne une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée.