Devoir surveillé n°4

MP Clemenceau 2022-23

Jeudi 1er décembre 2022

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence!!

Il y a deux problèmes au choix : un sujet type CCP et un de type CentraleSupélec.
Vous ne devez faire qu'un et un seul problème.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Les calculatrices sont interdites.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Problème de type CCP

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie **I**, où il est égal à 2.

On note $\mathscr{M}_n(\mathrm{IR})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique $((i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et I_n sa matrice unité.

On note $\mathrm{IR}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathrm{IR})$ et u l'endomorphisme de IR^n canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ de $\mathrm{IR}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout P de $\mathrm{IR}[X]$ est noté $\mathrm{IR}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$ ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme polynôme minimal de l'endomorphisme u, c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note φ_A l'application de $\mathscr{M}_n(\mathrm{IR})$ dans lui même définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathrm{IR}) \quad \varphi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A.
Les parties **I** et **II** étudie la diagonalisabilité de φ_A, les parties **III** et **IV** en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Etude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1) Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2) Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathscr{M}_2(\mathrm{IR})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathrm{IR}$).

3) Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée.

4) En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5) Montrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Etude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6) On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u, et, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Enfin, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$.

a) Exprimer, pour tout couple (i, j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b) Démontrer que, pour tout couple (i, j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A.

c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

7) On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable et tant qu'endomorphisme de de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i, j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

i) Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

ii) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

iii) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A.
On considère alors $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $Y \neq 0$, tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \overline{z}Y$.
En calculant $\varphi_A(X\,{}^tY)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c) Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Etude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8) Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

9) Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\ker(\varphi_A))$.

10) *Un cas d'égalité*
On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).
On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que, si $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, avec $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$, alors $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c) En déduire $\ker(\varphi_A)$.

11) *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ le sous espace propre associé à la valeur propre λ_k.
On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker(\varphi_A)$ si et seulement si , pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v.

b) En déduire que $B \in \ker(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de sous espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c) Préciser la dimension de $\ker(\varphi_A)$.

d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k.

Partie IV. Etude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé. On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

14) Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul.

15) En déduire que $B^d = 0$.

Problème de type CentraleSupélec

Rappels, notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n. De plus :
• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ;
• si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $A_{i,j}$ le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j ;
• pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha, \beta)$ est la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$;
• si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_p)$ sont dans $\mathbb{R}^p$, on désigne par $\operatorname{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \cdots, M(\alpha_p, \beta_p))$ la matrice de $\mathcal{M}_{2p}$ définie par blocs carrés d'ordre 2 dont les seuls blocs éventuellement non nuls sont les blocs diagonaux $M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \cdots, M(\alpha_p, \beta_p)$;
• I_n est la matrice unité élément de $\mathcal{M}_n$;
• On rappelle les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et leur codage :

opérations	codage
échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
multiplication de la ligne i par $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
ajout de la ligne j, multipliée par le scalaire λ, à la ligne i ($i \neq j$)	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si E est la matrice obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, alors EA (resp.AE) est la matrice obtenue à partir de A en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) de A (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On confond respectivement :
• matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) canoniquement associé,
• vecteur de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) et matrice colonne de ses coordonnées,
• matrice de taille 1 et scalaire la constituant.

On rappelle qu'une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $s^2 = s \circ s = Id_{\mathbb{R}^n}$; il existe alors deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que s soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, définie par : $s|_{E_1} = Id_{E_1}$ et $s|_{E_2} = -Id_{E_2}$.
Préciser la symétrie , c'est déterminer les sous-espaces E_1 et E_2 associés.

On note (P_A) la propriété : (P_A) $\quad$ A ne possède pas de valeur propre réelle
Le but de ce problème est d'étudier des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P_A). Après avoir établi quelques résultats préliminaires, on étudie des cas particuliers dans les parties I et II et un cas plus général dans la partie III.

Résultats préliminaires

1) On se propose de démontrer le résultat suivant :
« deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».
Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

(a) Montrer qu'il existe (R, J) éléments de $\mathcal{M}_n$ tels que $P = R + \imath J$ avec $\imath^2 = -1$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$

(c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0 J) \neq 0$.

(d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) (a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

(b) En déduire que s'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (P_A) , alors n est pair

Dans toute la suite du problème, on suppose n pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Première partie

I.A) Dans cette section I.A., on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on désigne par (e_1, e_2) la base canonique, avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

3) On considère la matrice $M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on désigne par u l'endomorphisme associé.

a) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de s_1, symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}e_2$.

b) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de l'application $u \circ s_1$. En déduire qu'il existe une symétrie s_2, qu'on précisera, telle que $u = s_2 \circ s_1$.

4) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est semblable à $M(0,1)$ et donner une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que $M(0,1) = P^{-1}AP$.

b) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Soit α et β des nombres réels tels que $\beta^2 - \alpha^2 = 1$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

c) Montrer que B est semblable à $M(0,1)$ et donner une matrice Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M(0,1) = Q^{-1}BQ$. *on pourra calculer* Be_1.

d) Montrer que B est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

5) question à ne pas traiter mais à admettre.On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tels que $\beta^2 + \alpha^2 = 1$.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

6) On considère à présent la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\beta^2 + \alpha^2 \neq 0$.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de A pour que (P_A) soit réalisée.

(b) En supposant que A vérifie (P_A), et en étudiant la diagonalisation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de A , montrer qu'il existe une unique matrice, semblable à A , du type $M(\alpha,\beta)$ avec α réel et β réel strictement positif. Expliciter α réel et β en fonction de a, b, c, et d .

(c) Que peut-on dire de $\det(A)$ si A vérifie (P_A) et est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

(d) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.B) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = I_p$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 2B & -5B \\ B & -2B \end{pmatrix}$$

8) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, des entiers naturels q et r tels que $Q^{-1}BQ$ soit sous la forme d'une matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$

On convient que cette matrice vaut I_p lorsque $r = 0$ et $q = p$ et qu'elle vaut $-I_p$ lorsque $q = 0$ et $r = p$.

9) Déterminer une matrice par blocs P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et constituée de multiples de I_p telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$

10) En déduire que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$

11) Montrer alors que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice du type diag $(M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1))$.

12) Exemple : on considère dans $\mathcal{M}_4$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice inversible M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^{-1}AM = \operatorname{diag}(M(0,1), M(0,1))$.

(b) En utilisant la technique vue à la question **I.A.1**, montrer que A est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Deuxième partie

II.A) Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

13) Montrer que (P_A) est réalisée.

14) Si E est obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, comment déduit-on EAE^{-1} de A ? On distinguera les trois opérations élémentaires codées sous la forme

a) $L_i \leftrightarrow Lj$,

b) $L_i \leftarrow \alpha Li$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

c) $L_i \leftarrow Li + \lambda Lj$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

15) (a) En utilisant **II.A.1**, montrer qu'il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

(b) En utilisant des opérations élémentaires, en déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que si $A' = PAP^{-1}$ alors $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 1$.

(c) Montrer alors que $A'_{i,2} = 0$ si $i \neq 1$ et $A'_{1,2} = -1$.

16) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que $QA'Q^{-1}$ soit de la forme par blocs $\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$.

17) Montrer que A est semblable à une matrice du type diag $M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1)$.

18) *Exemple :* en utilisant la méthode décrite dans cette partie, trouver une matrice M inversible de telle que $MAM^{-1} = \operatorname{diag} M(0,1), M(01)$ où A est la matrice de la question **I.B.5** . On fera apparaître clairement les opérations élémentaires utilisées.

II.B) Dans cette sous partie A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

19) Montrer que A vérifie (P_A).

20) Montrer que A est semblable à la matrice d'ordre n $\operatorname{diag} M(\alpha,\beta), M(\alpha,\beta), \cdots, M(\alpha,\beta)$. Que peut-on dire de $\det(A)$?

II.C) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $u(P)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad , u(P)(x) = x^{n-1} P\left(\frac{-1}{x}\right)$$

21) Déterminer pour quelles valeurs de i et j dans $\{0, \cdots, n-1\}$, le plan $Vect(X^i, X^j)$ est stable par u.

22) En déduire que la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{n+1-i,i} = (-1)^{i-1}$ si $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients de A étant nuls, est semblable à $\operatorname{diag} M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1)$.

Troisième Partie

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (P_A). On se propose de montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

i) A est semblable à une matrice du type $\operatorname{diag} M(\alpha_1,\beta_1), M(\alpha_2,\beta_2), \ldots, M(\alpha_p,\beta_p)$ avec $(\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour $1 \leq k \leq p$.

ii) Il existe un polynôme réel à racines simples complexes non réelles annulé par A.

iii) Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 stable par A possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A.

III.A) Dans cette sous partie **III.A**, on montre que (i)$\Rightarrow$(ii).

23) Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, le polynôme $(X-\alpha)^2 + \beta^2$ ne possède que des racines simples complexes non réelles.

24) En déduire que (i)$\Rightarrow$(ii).

III.B) Dans cette section **III.B**, on montre que (ii)$\Rightarrow$(iii). On suppose donc que A vérifie (ii). Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 et stable par A. Soit (f_1, f_2) une base de E que l'on complète en une base $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

25) Montrer que dans la base $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a une matrice s'écrivant par blocs : $\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

26) Vérifier que A' ne possède pas de valeur propre réelle et en déduire que A' est semblable à une matrice du type $M(\alpha,\beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

27) Montrer que E est inclus dans $\ker((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$.

28) Montrer que $\ker((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A dans $\mathbb{R}^n$.

29) En utilisant une technique analogue à celle vue dans les parties **II.A.3** et **II.A.4**, montrer que E possède un supplémentaire stable par A dans $\ker((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$, puis conclure que(iii) est réalisé.

III.C)

30) En raisonnant par récurrence, montrer que (iii)$\Rightarrow$(i).