Devoir surveillé n°3

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 28 novembre 2024

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence !!

Le sujet comporte deux problèmes au choix, un type CCINP et un type CentraleSupélec.
Il ne faut commencer et ne traiter qu'un seul problème.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Type CentraleSupélec

Dans tout le problème, I désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.
Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où f est une application continue définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.
On verra que l'espace des solutions contient une solution f_1 ayant un comportement particulier en $+\infty$.
Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général. Les Parties IV à V envisagent diverses propriétés de la fonction f et sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un premier exemple

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

2) On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos(x) = 0, \quad , x \in \mathbb{R}$$

Déterminer une fonction Y_0 bornée et une fonction g telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x), \text{ où} \lambda \in \mathbb{R}$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin(x) = 0$.

3) Soit Π le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

où α et β sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit f_1 par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de Φ étant considérée comme évidente, donner la matrice de Φ dans la base de Π constituée des fonctions *cosinus* et *sinus.*

b) On munit Π de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Déterminer une constante $k > 0$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait

$$\|f_1\|_\infty \leqslant k \|f\|_\infty$$

Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.
Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur Π et déterminer la valeur de cette limite.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0$$

4) Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.

5) Pour tout point $m\,(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m\,(x_m) = y_m$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points m tels que $Y'_m(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des m tels que $Y''_m(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$.

b) Quelle est la place de la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$?

(on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$).

c) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\lambda_1}$, $\mathcal{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

Partie III - La transformation Φ

On suppose maintenant que I est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, a pouvant être égal à $-\infty$.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f / \exists \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions f négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (α dépendant de f).

6) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Étant donné $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0.$$

7) Montrer que E_f admet une unique solution $f_1 \in \mathcal{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in I, f_1(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit l'application $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $\Phi(f) = f_1$; elle est évidemment linéaire.

8) Soit Φ^n la composée n fois de Φ avec elle-même. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \Phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de I,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément vers une constante sur tout compact de I,

(iii) la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout compact de I.

9) Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties).

10) L'application linéaire
$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, f \mapsto f_1$$
est-elle injective ? Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

Partie IV - Fonctions bornées

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

$\mathcal{B}$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (défini au III), l'application Φ est définie sur $\mathcal{B}$.

11) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution bornée f_1.

12) On munit $\mathcal{B}$ de la norme
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$
L'application Φ est-elle continue pour cette norme ?

13) Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_0$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en $+\infty$, $\mathcal{K}$ le sous-espace des fonctions constantes.

Montrer que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$.

Montrer que ces sous-espaces sont stables par Φ.

14) Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout $f \in \mathcal{L}$, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que f a une limite en $+\infty$).

15) Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une injection de $\mathcal{B}$ dans le sous-espace des fonctions bornées de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle dans l'image de Φ ? Préciser l'image de Φ.

Partie V - Fonctions polynomiales

Soit d un entier naturel et $\mathcal{FP}_d$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

16) Soit une famille $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ de $d+1$ nombres réels distincts. Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, on pose
$$N_\xi(f) = \sup_{0 \le i \le d} |f(\xi_i)|.$$
Montrer que c'est une norme sur $\mathcal{FP}_d$.

17) Soit une suite de fonctions polynomiales de $\mathcal{FP}_d$
$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \ldots + a_{0,n}.$$
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

(iii) il existe $d+1$ nombres réels distincts $\xi_0, \ldots, \xi_d$ tels que, pour tout indice $0 \le i \le d$, la suite $(f_n(\xi_i))$ converge.

(iv) chacune des $d+1$ suites numériques $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $0 \le i \le d$, converge.

18) Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, montrer que l'équation différentielle E_f a une unique solution $f_1 = \Phi(f)$ dans $\mathcal{FP}_d$.

On note encore $\Phi : f \mapsto f_1$; Φ est considéré ici comme un endomorphisme de $\mathcal{FP}_d$.

19) Pour f fonction polynomiale de degré d, on forme la suite de fonctions polynomiales (f_n) où $f_n = \Phi^n(f)$. Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

●●● FIN ●●●

PROBLEME : Une introduction aux fonctions tests

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ est muni de sa norme naturelle : la valeur absolue.
Toutes les fonctions considérées seront à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si h est une fonction de classe C^k, $h^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de h.
Si h est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on note $\|h\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite **nulle à l'infini** si ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont nulles.

<u>Objectifs</u> :

Le **support** d'une fonction f définie sur un intervalle I, noté $\operatorname{Supp} f$, est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas : $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in I, f(x) \neq 0\}}$.
Une fonction est dite à **support compact** si son support est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
On appellera **fonction test,** une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des fonctions tests. Il est facile de vérifier que $\mathcal{T}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Le but du sujet est de découvrir des fonctions tests dans la partie **I** et d'en voir deux utilisations ; pour l'approximation uniforme de fonctions dans la partie **II**, et pour démontrer un théorème de Whitney à la partie **III**.
Les parties **II** et **III** sont **indépendantes** et utilisent des résultats de la partie **I**.

I. Découverte des fonctions tests

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est bornée si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie sur I est donc à support compact si et seulement si $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

2. *Quelques exemples*

a. On note u la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4 - x^2$ si $x \in [0,2]$ et $u(x) = 0$ si $x > 2$.
Représenter la fonction u et déterminer son support. La fonction u est-elle à support compact ? La fonction u est-elle une fonction test ?

b. La fonction sinus est-elle une fonction test ?

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ si $x \leq 0$.

a. La fonction h est, d'après les théorèmes généraux, de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k dont on précisera le degré tel que pour tout réel x strictement positif, $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$. En déduire que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction h est-elle une fonction test ? h est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

4. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = h\big(-(x+1)(x-1)\big)$.
   - **a.** Déterminer le support de φ puis justifier que c'est une fonction test. Déterminer les variations de φ puis tracer l'allure de sa courbe.
   - **b.** Déterminer une fonction test dont le support est $[3,8]$ puis une fonction test dont le support est $[1,2] \cup [5,6]$.

5. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à support compact.

6. *Construction d'une suite régularisante*
   - **a.** Justifier que la fonction φ de la question **4.** est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t > 0$. En déduire l'expression d'une fonction test ρ positive, de support $[-1,1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout entier naturel non nul *n*, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. La suite de fonctions $(\rho_n)_n$ est appelée *suite régularisante*.

   - **b.** Pour tout entier naturel non nul *n*, déterminer le support de ρ_n et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\,\mathrm{d}t$.

II. Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe C^∞ ou par des fonctions tests

Un théorème de Weierstrass nous dit que toute fonction continue sur un **segment** peut être approchée uniformément par des fonctions polynômes.

Voyons ce qu'il en est si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier (donc sur **un intervalle non borné**).

7. *L'approximation polynomiale ne convient plus*
   Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction *f*.
   - **a.** Justifier qu'il existe un entier naturel *N* tel que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à *N*, on ait pour tout réel *x*, $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
     Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geq N$?
   - **b.** Conclure que *f* est nécessairement une fonction polynôme.

Nous allons toutefois démontrer qu'il est possible d'approcher certaines fonctions uniformément sur $\mathbb{R}$, non pas par des fonctions polynômes, mais par des fonctions de classe C^∞, ou par des fonctions tests.

Plus précisément, nous allons démontrer les deux résultats d'approximation suivants :
(A_1) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact.
(A_2) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions tests.
L'approximation (A_1) est un résultat préliminaire, qui est démontré à la question **8.**

8. *Approximation d'une fonction continue nulle à l'infini par une suite de fonctions continues à support compact*

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction paire z_n par $z_n(x)=1$ si $x\in[0,n[$, $z_n(x)=-x+n+1$ si $x\in[n,n+1[$ et $z_n(x)=0$ si $x\in[n+1,+\infty[$.

a. Représenter graphiquement la fonction z_n. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (z_n). La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

b. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini.
Démontrer que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$. On peut donc poser pour tout entier naturel n, $\alpha_n=\sup\limits_{|x|\geq n}|g(x)|$.

c. Etudier la monotonie de la suite (α_n) puis déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Pour tout entier naturel n, on définit la fonction g_n en posant $g_n=g\,z_n$. Déterminer un réel k tel que pour tout entier naturel n, $\|g_n-g\|_\infty\leq k\alpha_n$.

e. En déduire le résultat d'approximation (A_1) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact.

Dans les questions **9.**, **10.**, et **11.**, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g désigne une fonction continue à **support compact**. Il existe donc un réel $R>0$ tel que $\operatorname{Supp} g\subset[-R,R]$.

9. *Convolution*

a. Justifier que, pour tout réel x, l'application $t\mapsto g(t)f(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction $g*f$ par $(g*f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$. On dit que $g*f$ est le *produit de convolution* de g par f.

b. Soit x un réel, montrer que l'application $t\mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit donc sur $\mathbb{R}$ la fonction $f*g$ par $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Comparer les fonctions $f*g$ et $g*f$.

10. *Support d'une convolution*

a. Dans cette question, on suppose de plus que f est à support compact, il existe donc un réel $S>0$ tel que $\operatorname{Supp} f\subset[-S,S]$. Si $x>R+S$, que vaut $(f*g)(x)$?

En déduire que $f*g$ est aussi à support compact.

b. Montrer que si la fonction f n'est pas à support compact, $f*g$ n'est pas nécessairement à support compact.

11. *Dérivation d'une convolution*

a. Soit a un réel strictement positif. Justifier que pour tout $x\in[-a,a]$,

$$(f*g)(x)=\int_{-a-R}^{a+R}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que si g est de plus supposée de classe C^1, alors $f*g$ est de classe C^1. Écrire alors $(f*g)'$ à l'aide d'un produit de convolution.

Si on suppose de plus, que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on démontre de la même manière et on l'admettra que $f * g$ est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

12. *Application à l'approximation*

a. Soit n un entier naturel non nul, ρ_n désigne la fonction test introduite dans la question **6.**, montrer que pour tout réel x, $\left|f * \rho_n(x) - f(x)\right| \leq \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left|f(x-t) - f(x)\right| \rho_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b. On suppose de plus que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer avec soin que la suite de fonctions $\left(f * \rho_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de classe C^∞ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

c. En déduire le résultat d'approximation (A_2) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions tests (on pourra utiliser librement le résultat suivant : une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$).

<u>Remarque</u> : L'espace des fonctions tests joue un rôle important en analyse, notamment dans la théorie des distributions pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

III. Théorème de Whitney

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème de Whitney : Si F est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $F = Z(f)$ où $Z(f) = \left\{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\right\}$.

13. Justifier que la réciproque du théorème de Whitney est vraie.

14. *Une première tentative de preuve…infructueuse*
Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on note $d\left(x,F\right) = \inf_{y\in F}\left|x-y\right|$ et d_F l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $d_F(x) = d\left(x,F\right)$.
Déterminer $Z\left(d_F\right)$. Quelle propriété notée (P) devrait vérifier l'application d_F pour que le théorème de Whitney puisse être démontré ?
Représenter graphiquement d_F dans le cas particulier où $F = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$.
d_F vérifie-t-elle cette propriété (P) ? Justifier votre réponse.

15. *Utilisation de fonctions tests*
Démontrer le théorème de Whitney dans les cas suivants :
(i) F est le complémentaire d'un intervalle ouvert $\left]a,b\right[$.
(ii) F est le complémentaire de la réunion de deux intervalles ouverts disjoints.

16. Démontrer le théorème de Whitney dans le cas général. On utilisera librement le résultat suivant : une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}$, peut s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, c'est-à-dire $\Omega = \bigcup_{k\in I} \left]a_k,b_k\right[$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Fin de l'énoncé