Correction : Devoir surveillé n°3

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 28 novembre 2024

Type CentraleSupélec

Dans tout le problème, I désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où f est une application continue définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

On verra que l'espace des solutions contient une solution f_1 ayant un comportement particulier en $+\infty$.

Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général. Les Parties IV à V envisagent diverses propriétés de la fonction f et sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un premier exemple

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t)\, dt, \quad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t)\, dt$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^{-t}\cos(t)$ et $t \mapsto e^{-t}\sin(t)$ sont continues sur $[x, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in [x, +\infty[$, on a $\left|e^{-t}\cos(t)\right| \leqslant e^{-t}$ et $\left|e^{-t}\sin(t)\right| \leqslant e^{-t}$. Or la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable que $[x, +\infty[$ donc les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\, dt$ sont absolument convergentes. Par propriété sur les intégrales on a l'existence et l'égalité suivante

$$\int_x^{+\infty} e^{-t+it}\, dt = \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\, dt + i\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\, dt$$

Une primitive de $t \mapsto e^{-t+it}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{-1+i} e^{-t+it}$. Cette dernière tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et donc :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\, dt + i\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\, dt = \frac{-1}{-1+i} e^{-x+ix} = \frac{1+i}{2} e^{-x+ix}$$

On en déduit

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\, dt = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}, \quad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\, dt = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2}$$

2) On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos(x) = 0, \quad , x \in \mathbb{R}$$

Déterminer une fonction Y_0 bornée et une fonction g telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x), \text{ où} \lambda \in \mathbb{R}$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin(x) = 0$.

Correction : Les solutions générales de $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la méthode de la variation de la constante $x \mapsto \lambda(x)e^x$ est solution de $y' - y = -\cos x$ si et seulement si $\lambda'(x)e^x = -\cos x$. On peut donc en particulier choisir, compte-tenu de la convergence de l'intégrale, $\lambda(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos t \, \mathrm{d}t$ de sorte que $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$ est une solution particulière.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \cos x = 0$ est donc $Y_\lambda : x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

On remarque que $Y_0(x)$ est la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.

De même la solution générale sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \sin x = 0$ est $Z_\lambda : x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

3) Soit Π le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

où α et β sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit f_1 par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de Φ étant considérée comme évidente, donner la matrice de Φ dans la base de Π constituée des fonctions *cosinus* et *sinus.*

Correction : D'après la première question Φ est bien définie. Elle est en outre clairement linéaire et, toujours d'après la première question, les images des fonctions *cosinus* et *sinus* appartiennent à Π. Il en découle que Φ définit bien un endomorphisme de Π.

D'après la première question, la matrice de Φ dans la base (*cosinus, sinus*) est $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On munit Π de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Déterminer une constante $k > 0$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait

$$\|f_1\|_\infty \leqslant k \, \|f\|_\infty$$

Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur Π et déterminer la valeur de cette limite.

Correction : Soit $f \in \Pi$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$, avec $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. On en déduit que $\|f\|_\infty = \sqrt{a^2 + b^2}$.

D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{a + b}{2} \cos(x) + \dfrac{b - a}{2} \sin(x)$. On en déduit que $\|f_1\|_\infty = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_\infty$.

Il en résulte que $\|f_1\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2}^n} \|f\| |_\infty$.

Ainsi, pour toute fonction $f \in \Pi$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0$$

4) Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Correction : Soit $x > 0$. La fonction qui à t associe $\frac{t}{t}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$. De plus au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{e^{-t}}{t} = o(\frac{1}{t^2})$, or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Il en résulte, par la méthode de la variation de la constante de la même manière exactement qu'à la première partie, que la solution générale sur $]0, +\infty[$ de $y' - y + \frac{1}{x} = 0$ est :

$Y_\lambda : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

Par intégration par parties, il vient que $0 \leqslant Y_0(x) = \frac{1}{x} - e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$ d'où $\lim_{x\to+\infty} Y_0(x) = 0$.

De l'expression de la solution générale, il en découle que Y_0 est la seule solution bornée au voisinage de $+\infty$ (en fait elle tend même vers 0).

On a, au voisinage de 0^+, $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ de sorte que, par intégration des relations de comparaison dans le cas divergent, lorsque x tend vers 0, $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \sim \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

De l'expression de la solution générale, il en découle que $\lim_{x\to 0^+} Y_\lambda(x) = +\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.

5) Pour tout point $m\,(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m\,(x_m) = y_m$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points m tels que $Y_m'(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des m tels que $Y_m''(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$.

Correction : D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on dispose bien de l'existence et de l'unicité de la solution Y_m telle que $Y_m(x_m) = y_m$ pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$.

On a en particulier $Y_m(x_m) - Y_m'(x_m) + \frac{1}{x_m} = 0$ donc $Y_m'(x_m) = 0$ si et seulement si $y_m = \frac{1}{x_m}$.

Donc $\mathcal{H}$ est la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$. C'est l'ensemble des points des courbes intégrales à tangente horizontale.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ il en résulte classiquement que toute solution est de classe $\mathcal{C}^2$ et ainsi on a en particulier $Y_m''(x_m) - Y_m'(x_m) - \frac{1}{x_m^2} = 0$ donc $Y_m''(x_m) = 0$ si et seulement si $Y_m'(x_m) + \frac{1}{x_m^2} = 0$ soit si et seulement si $Y_m(x_m) - \frac{1}{x_m} + \frac{1}{x_m^2} = 0$.

Donc $\mathcal{T}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ pour $x > 0$. C'est l'ensemble des points d'inflexion analytique des courbes intégrales (on peut noter qu'en un tel point la dérivée est forcément négative égale à $-\dfrac{1}{x_m^2}$).

b) Quelle est la place de la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$?

(on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$).

Correction : On a déjà noté que $Y_0(x) = \dfrac{1}{x} - \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $Y_0(x) < \dfrac{1}{x}$.

Par intégration par parties à nouveau (validée par la méthode usuelle), il vient que $Y_0(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{2e^{-t}}{t^3}\,\mathrm{d}t$ donc $Y_0(x) > \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi la courbe intégrale $\mathcal{C}_0$ est strictement comprise entre les courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$.

c) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\lambda_1}$, $\mathcal{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

Partie III - La transformation Φ

On suppose maintenant que I est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, a pouvant être égal à $-\infty$.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f / \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions f négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (α dépendant de f).

6) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Étant donné $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0.$$

7) Montrer que E_f admet une unique solution $f_1 \in \mathcal{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in I, f_1(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit l'application $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $\Phi(f) = f_1$; elle est évidemment linéaire.

8) Soit Φ^n la composée n fois de Φ avec elle-même. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \Phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de I,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément vers une constante sur tout compact de I,

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact de I.

9) Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties).

10) L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

Partie IV - Fonctions bornées

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

$\mathcal{B}$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (défini au III), l'application Φ est définie sur $\mathcal{B}$.

11) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution bornée f_1.

12) On munit $\mathcal{B}$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

L'application Φ est-elle continue pour cette norme ?

13) Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_0$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en $+\infty$, $\mathcal{K}$ le sous-espace des fonctions constantes.

Montrer que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$.

Montrer que ces sous-espaces sont stables par Φ.

14) Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout $f \in \mathcal{L}$, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que f a une limite en $+\infty$).

15) Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une injection de $\mathcal{B}$ dans le sous-espace des fonctions bornées de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle dans l'image de Φ ? Préciser l'image de Φ.

Partie V - Fonctions polynomiales

Soit d un entier naturel et $\mathcal{FP}_d$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

16) Soit une famille $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ de $d+1$ nombres réels distincts. Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, on pose

$$N_\xi(f) = \sup_{0 \leq i \leq d} |f(\xi_i)|.$$

Montrer que c'est une norme sur $\mathcal{FP}_d$.

17) Soit une suite de fonctions polynomiales de $\mathcal{FP}_d$

$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \ldots + a_{0,n}.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

(iii) il existe $d+1$ nombres réels distincts $\xi_0, \ldots, \xi_d$ tels que, pour tout indice $0 \leq i \leq d$, la suite $(f_n(\xi_i))$ converge.

(iv) chacune des $d+1$ suites numériques $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $0 \leq i \leq d$, converge.

18) Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, montrer que l'équation différentielle E_f a une unique solution $f_1 = \Phi(f)$ dans $\mathcal{FP}_d$.

On note encore $\Phi : f \mapsto f_1$; Φ est considéré ici comme un endomorphisme de $\mathcal{FP}_d$.

19) Pour f fonction polynomiale de degré d, on forme la suite de fonctions polynomiales (f_n) où $f_n = \Phi^n(f)$. Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

●●● FIN ●●●

Problème

I- Découverte des fonctions tests

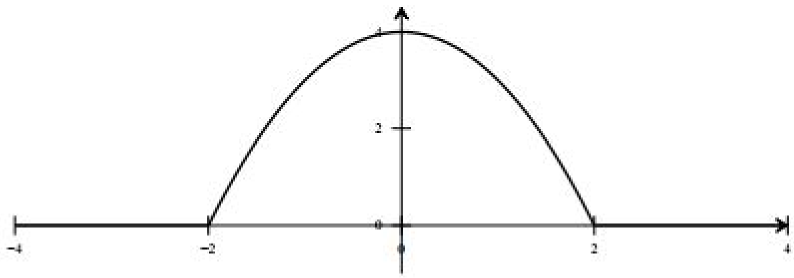
1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$,
$\Rightarrow$) Si A est bornée dans $\mathbb{R}$,alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset [-r, r]$, donc
$\overline{A} \subset \overline{[-r, r]} = [-r, r]$ et par suite $\overline{A}$ est bornée.
On sait que $\overline{A}$ est toujours fermée, et puisque $\mathbb{R}$ est de dimension finie, on déduit que $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
$\Leftarrow$) Si $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors A est bornée dans $\mathbb{R}$ et puisque $A \subset \overline{A}$, on déduit que A est bornée dans $\mathbb{R}$.

2. Quelques exemples :

   a. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application paire telle que :

$$u(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ x \in [0, 2] \\ 0 & si\ x > 2 \end{cases}$$

   Il est clair que l'application u est continue sur $\mathbb{R}$ et que $u(x) \neq 0$ si et seulement si $x \in]-2, 2[$, donc $Supp(u) = [-2, 2]$
   u est donc a support compact, mais u n'est pas une fonction test car u n'est pas dérivable en 2 $\quad (D_g(u)(2) = -4 \neq 0 = D_d(u)(2)\ )$
   Représentation graphique de u :



   b. La fonction sin est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais son support est non borné car $(x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi)_n$ est une suite de points de support de sin telle que $\lim\limits_{n\infty} x_n = +\infty$. Donc l'application sin n'est pas une fonction test .

3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x}) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$

   a. h est C$^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (par opérations) avec $h^{(k)}(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$.
   Pour $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}\exp(-\dfrac{1}{x})$, on pose $P_1(X) = X^2$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $h^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})$ pour tout $x > 0$, alors :

$$h^{(k+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_k'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}P_k(\frac{1}{x})\right)\exp(-\frac{1}{x}) \ \text{ pour } \ x > 0$$

   .
   Par le principe de récurrence la suite polynomiale $(P_k)_k$ vérifie : $P_{k+1}(X) = -X^2P_k' + X^2P_k$ et $\deg(P_{k+1}) = \deg(P_k) + 2$.
   Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=0}^{k-1}(\deg(P_{j+1}) - \deg(P_j)) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} 2 = 2k$ et par suite $\deg(P_k) = 2k$ car $\deg(P_0) = 0$ $(P_0 = 1)$
   Conclusion :

$$\forall x > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ h^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) \ \ et\ \deg(P_k) = 2k$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et de plus
$\lim\limits_{x\to 0^+} h^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})\ +0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} h^{(k)}(x) = 0$.
par le principe de récurrence, via le théorème du prolongement de la dérivée, on déduit que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}(0) = 0$.

b. La fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas a support compact car $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc h n'est pas une fonction test .
h n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 en effet : si h bes développable en série entière sur un voisinage de 0, alors, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-r, r[,\ \ h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \ \text{ car } \ h^{(k)}(0) = 0 \ \text{ pour tout } \ k,$$

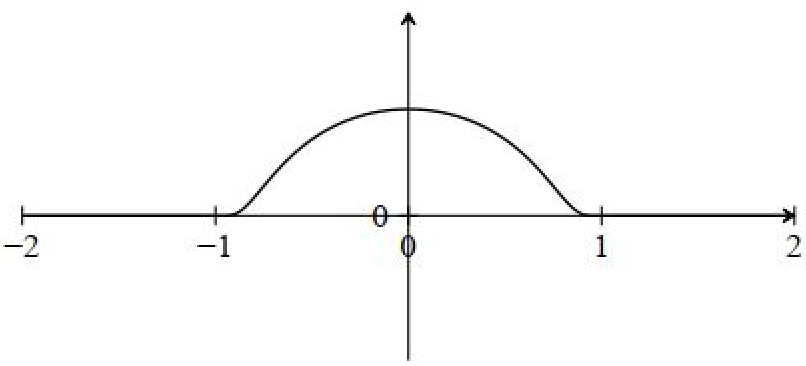
ce qui est impossible car h n'est pas identiquement nulle sur $]0, r[$.

4. Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = h(-(x+1)(x-1))$

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow h(-(x+1)(x-1)) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$, Donc, $\mathrm{Supp}(\varphi) = [-1, 1]$.
La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de classe C^∞ et puisque son support est compact , l'application est donc une fonction test.
Variations de la fonction φ :

x		-1		+1	
$-(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	0		$e^{\frac{1}{(x-1)(x+1)}}$		0

$\varphi'(x) = -2xh'(-(x^2-1))$ où $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} > 0$ pour tout $x > 0$



b. La fonction $x \to h(-(x-3)(x-8))$ est une fonction test dont le support est $[3, 8]$.
La fonction $x \to h(-(x-1)(x-2)) + h(-(x-5)(x-6))$ est une fonction test car elle est de classe C^∞ et dont son support est $[1, 2] \cup [5, 6]$

5. Si une fonction est a support compact, alors celle-ci est nulle au voisinage de ∞, donc de limite nulle à l'infini.

6. Construction d'une suite régularisante :

a. Comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et a support compact (la foction est nulle en dehors de $[-1, 1]$), alors φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi = \int\limits_{-1}^{+1} \varphi > 0$ car φ est continue et strictement positive sur $]-1, 1[$.
Posons $c = \int\limits_{-1}^{+1} \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi$ et $\rho(x) = \dfrac{1}{c}\varphi(x)$ pour tout x, alors ρ , comme φ , est une fonction test dont le support est $[-1, 1]$ et que ρ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int\limits_{\mathbb{R}} \rho = \dfrac{1}{c}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi = 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application ρ_n est de classe C^∞ (opérations sur les foctions de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\rho_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \rho(nx) \neq 0 \Leftrightarrow nx \in]-1,1[\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$$

donc $Supp(\rho_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

La fonction ρ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int\limits_R \rho_n = n \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho(nx)dx = \int\limits_{-1}^{1} \rho(t)dt = 1$.

En conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ρ_n est une fonction test et que $\int\limits_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$.

II- Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe C^∞ ou par des fonctions tests

7. **L'approximation polynomiale ne convient plus**
Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions plynomiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ tout entier .

a. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, comme $(p_n)_n$ est de Cauchy pour la norme de convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall n,\ m \in \mathbb{N},\ n \geqslant m \geqslant N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| \leqslant \varepsilon = 1$. En particulier pour $m = N$, on a le résultat demandé .

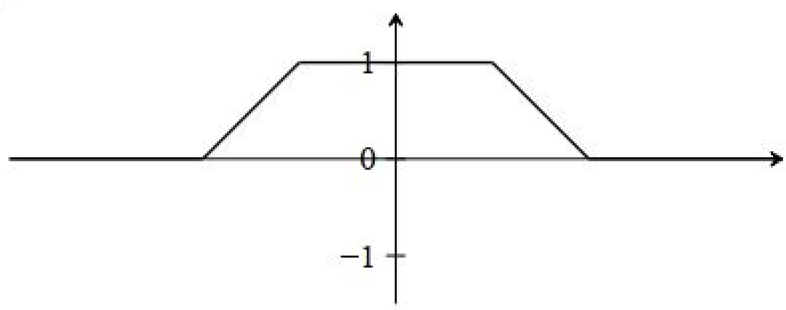
Pour $n \geqslant N$, la fonction poynomiale $P_n - P_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc constante, et par suite $\deg(P_n - P_N) \in \{-\infty, 0\}$.

b. D'après la question 7.a), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ \exists C_n \in \mathbb{R};\quad \forall x \in R$, $P_n(x) - P_N(x) = C_n$. Comme la suite $(P_n)_n$ converge simplement vers f sur, il en résulte que la suite $(C_n)_n$ converge. Si $C = \lim\limits_n C_n$, alors $C = \lim\limits_n C_n = \lim\limits_n (P_n(x) - P_N(x)) = f(x) - P_N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par suite $f(x) = P_N(x) + C$ pour tout x.
Conclusion : $f = P_N + C$ est donc une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

8. Approximation d'une fonction continue à l'infini par une suite de fonctions continues à support compact :
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad z_n$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ paire telle que :

$$z_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, n[\\ -x + n + 1 & si\ x \in [n, n+1[\\ 0 & si\ \mathrm{x} \in [n+1, +\infty[\end{cases}$$

a. Représentation garphique de z_n :



Limite simple de la suite (z_n) :
Comme z_n est paire pour tout entier n, il suffit d'étudier la convergence pour $x \geqslant 0$.
Soit $x \geqslant 0$, pour tout entier $n \geqslant E(x) + 1$, on a alors $x \in [0, n[$ et par suite $z_n(x) = 1$ et donc $\lim\limits_n z_n(x) = 1$.
En conclusion : la suite de fonctions $(z_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante 1 .
La convergence de la suite n'est pas uniforme, car pour $x_n = n+1$, on a $|z_n(x_n) - 1| = 1$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini
Montrons que g est bornée sur $\mathbb{R}$:
Soit $\varepsilon = 1 > 0$, comme $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$, il existe $a > 0$ tel que : $\forall x \in R,\ |x| \geqslant a$ on a $|g(x)| \leqslant 1$, donc g est bornée sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
g étant continue sur $\mathbb{R}$, en particulier g est continue sur le compact $[-a, a]$ et par suite g est bornée sur $[-a, a]$
En conclusion : g est bien bornée sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\alpha_n = \sup\limits_{|x|\geqslant n} |g(x)|$

c. Etude de la monotonie de la suite $(\alpha_n)_n$:
Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\{|g(x)|\,,\ |x| \geqslant n+1\ \} \subset \{|g(x)|\,,\ |x| \geqslant n\}$, il en résulte que

$$\alpha_{n+1} = \sup\{|g(x)|\,, |x| \geqslant n+1\} \leqslant \sup\{|g(x)|\,, |x| \geqslant n\} = \alpha_n.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est monotone décroissante .De plus $(\alpha_n)_n$ est minorée par 0, donc converge dans $\mathbb{R}$.
Montrons que $\lim\limits_n \alpha_n = 0$:
soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$, il exite $c > 0$ etl que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant c,\ |g(x)| \leqslant \varepsilon$
En particulier pour $n \geqslant c$, on a : $\forall x,\ |x| \geqslant n \Rightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon$ et par suite pour tout $n \geqslant c$, $0 \leqslant \alpha_n = \sup\limits_{|x|\geqslant n} |g(x)| \leqslant \varepsilon$.
En définitive :

$$\lim_n \alpha_n = 0.$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = gz_n$:
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) - g_n(x) = g(x)(z_n(x) - 1)$, et que pour $x \geqslant 0,\ z_n(x) - 1 =$
$\begin{cases} 0 & si\ x \in [0, n] \\ -x+n & si\ x \in [n, n+1[\\ -1 & si\ |x| \geqslant n+1 \end{cases}$ (on n'oublie pas que la fonction z_n est paire).
D'autre part $\|g_n - g\|_\infty = \max(\sup_{x\in[-n,n]} |g(x) - g_n(x)|\,, \sup_{|x|\geqslant n} |g(x) - g_n(x)|)$
$= \sup_{|x|\geqslant n} |g(x) - g_n(x)|$ car $g(x) - g_n(x) = 0$ pour $x \in [-n, n]$
Mais pour

$$|x| \geqslant n, |g(x) - g_n(x)| = |g(x)|\,|z_n(x) - 1| \leqslant |g(x)|\,(|z_n(x)| + 1) \leqslant \alpha_n\,(|z_n(x)| + 1) \leqslant 2\alpha_n.$$

En conclusion :

$$\|g_n - g\|_\infty \leqslant 2\alpha_n.$$

e. Comme la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0 (indépendement de x), il en résulte, d'après l'inégalité précèdente, que $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ tout entier.De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de support $[-n-1, n+1]$ qui est compact.
En conclusion : Toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini est limùite uniforme de suite de fonctions continue sur $\mathbb{R}$ à support compact .
f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact :

$$\exists R > 0,\ \ Supp(g) \subset [-R, R]$$

9. Convolution :

a. Pour x un réel fixé, l'application $t \mapsto g(t)f(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par opérations) et nulle sur $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pose $g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt$

b. Pour x fixé, l'application $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et nulle sur $]-\infty, -R-x[\cup]R-x, +\infty[$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On note $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

On fait le changement de variable $t \mapsto u = x - t$ qui est un C^1-différomorphisme , dans l'intégrale $f * g(x)$, on aura :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du = g * f(x). \end{aligned}$$

10. Support d'une convolution :

   a. Ici on suppose de plus que f est à support compact : $\exists S > 0$ tel que $Supp(f) \subset [-S, S]$
   Si $x > S + R$, alors $(f * g)(x) = \int\limits_{-S}^{S} f(t)g(x-t)dt$ car f est nulle en dehors de $[-S, S]$. Si $t \in [-S, S]$, alors $x - t \in [-S + x, S + x]$ et comme $x > R + S$, on a $x - t > R + \underbrace{S - t}_{\geqslant 0} \geqslant R$,
   donc $g(x - t) = 0$ et par suite $(f * g)(x) = 0$.
   Si $x < -R-S$, alors $(f*g)(x) = (g*f)(x) \int\limits_{-R}^{R} f(x)g(t)dt$ car $g$est nulle en dehors de $[-R, R]$ S $t \in [-R, R]$, alors $x-t \in [-R+x, R+x]$ et comme $x < -R-S$, on a $x-t < -R-\underbrace{S - t}_{\leqslant 0} \leqslant -S$,
   donc $f(x - t) = 0$ et par suite $(f * g)(x) = 0$.

   En conclusion : $f * g$ est à support compact .

   b. Supposons f n'est pas à support compact, montrons que $f * g$ n'est pas necessairement a support comapct.
   Prendre par exemple g positive non ulle et $f = 1$.

11. Dérivation d'une convolution :

   a. Soit a un réel strictement positif et $x \in [-a, a]$, on a :
   $(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int\limits_{-R}^{R} f(x-t)g(t)dt$ car g est nulle en *dehors* de $[-R, R]$.
   Avec le chagement de variable affine $t \to u = x - t$, on a : $f*g(x) = -\int\limits_{x+R}^{x-R} f(u)g(x-u)du = \int\limits_{x-R}^{x+R} f(u)g(x-u)du$.
   Pour $u \in [-a - R, x - R[$, on a : $-u > R - x$ et puis $x - u > R$, donc $g(x - u) = 0$.
   De même pour $u \in]x + R, a + R]$, on a : $-u < -x - R$ et puis $x - u < R$, donc $g(x - u) = 0$
   En concluison :

$$f * g(x) = \int_{x-R}^{x+R} f(u)g(x-u)du = \int_{-a-R}^{a+R} f(u)g(x-u)du.$$

   b. On suppose de plus que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors l'application

$$\begin{array}{rrcl} \Psi : & \mathbb{R} \times [-a-R, a+R] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & f(t)g(x-t) \end{array}$$

   est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x : de plus l'application $(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, t) = f(t)g'(x - t)$ qui est continue sur $\mathbb{R} \times [-a - R, a + R]$, donc par le théorème de dérivation sous le signe intgrale, la fonction $f * g$ est de classe C^1 et $(f * g)'(x) = \int\limits_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(x-t)dt$ car g' est aussi a support compact avec $Supp(g') \subset$

$[-R,R]$ (g est toujours nulle en dehors de $[-R,R]$, donc aussi g'...).
En conclusion : $(f*g)'=f*g'$.
Par le principe de rédurence on démontre que si g est calsse C^∞ alors $f*g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $(f*g)^{(k)}=f*g^{(k)}$ pour tout entier k.

12. Application à l'approximation :

   a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et $x\in\mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned} f*\rho_n(x)-f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(tdt-f(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(tdt-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_n(t)dt \text{ car } \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(t)dt=1\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x-t)-f(x)\right)\rho_n(tdt\\ & \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left(f(x-t)-f(x)\right)\rho_n(tdt \text{ car } Supp(\rho_n)=[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\end{aligned}$$
   D'où $|f*\rho_n(x)-f(x)|=\left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left(f(x-t)-f(x)\right)\rho_n(tdt\right|\leqslant\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|f(x-t)-f(x)|\,\rho_n(tdt.$

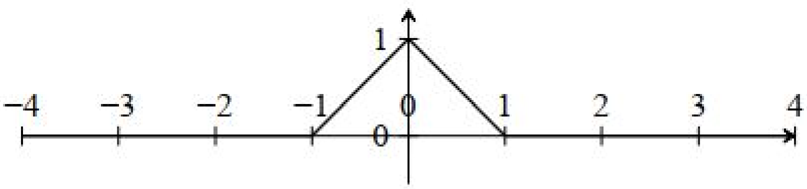
   b. On suppose ici f est de plus uniformément continue, soit $\varepsilon>0$, il existe alors un réel $\eta>0$ tel que : $\forall y,z\in R,\ |y-z|\leqslant\eta\Rightarrow|f(y)-f(z)|\leqslant\varepsilon\quad(*)$.
   Posons $n_0=E(\eta)+1\geqslant 1$, pour $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geqslant n_0$, et pour tous $x\in\mathbb{R}$, $t\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$, on a : $|(x-t)-x|=|t|\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\eta$ et par $(*)$, on déduit que $|f(x-t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.
   Doù $|f*\rho_n(x)-f(x)|\leqslant\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|f(x-t)-f(x)|\,\rho_n(tdt\leqslant\varepsilon\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\rho_n(tdt=\varepsilon$ pour tout x et tout entier $n\geqslant n_0$.
   En conclusion : $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ |f*\rho_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$ c'est à dire la suite de fonctions $(f*\rho_n)_{n\in N^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .

   c. Soit f une fonction continue sur R a support compact.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f*\rho_n$ est aussi a support compact (question 10) et comme ρ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (Questions 4 et 6), on a $f*\rho_n$ est une fonction de classe C^∞ sur R et par suite $f*\rho_n$ est une fonction test. La fonction f est nulle a l'infini, car f est support compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Par la question 12 , la suite de fonction $(f*\rho_n)_{n\geqslant 1}$ converge unformément vers f sur R.

III. Théorème de Whitney

13. Soit f une fonction de classe C^∞ sur R, posons $Z(f)=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)=0\}$ ensemble des zeros de f .
On a alors $Z(f)=f^{-1}\{0\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue .

14. Une première tentative de preuve...infructueuse
Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.
Cherchons $Z(d_F)$ où $d_F(x)=d(x,F)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in Z(d_F)\Leftrightarrow d(x,F)=0\Leftrightarrow x\in\overline{F}=F$ car F est fermée, donc $Z(d_F)=F$.
Si l'application d_F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors le théorème de Witney est démontré.
Représentation de d_F dans le cas de $F=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$:
on a $d_F(x)=\begin{cases}1-x & si\quad x\in[0,1]\\ x+1 & si\quad x\in[-1,0[\\ 0 & \quad\text{ailleurs}\end{cases}$



d_F ne vérifie la propriété car d_F n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d_F n'est pas de classe C^∞ .

15. Utilisation de foction test

i) On suppose que F est le complémentaire de $]a,b[$ avec $a<b$, donc $F=]-\infty,a]\cup[b,+\infty[$:
On considère la fonction f telle $f(x)=h(-(x-a)(x-b))$ où h est la fonction définie dans la question 3, alors f est une fonction test (f est de classe C^∞ et a support compact : $Supp(f)=[a,b]$), avec $Z(f)=F$. Donc le théorème est démontré .

ii) On suppose que F est le complémentaire de $]a,b[\cup[c,d[$ avec $a<b<c<d$:
On considère la fonction f telle $f(x)=h(-(x-a)(x-b))+h(-(x-c)(x-d))$ où h est la fonction définie dans la question 3, alors f est une fonction test (f est de classe C^∞ et a support compact : $Supp(f)=[a,b]\cup[c,d]$), avec $Z(f)=F$. Donc le théorème est démontré .

16. Démontrons le Théorème dans le cas général :
Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$, notons par Ω le complémentaire de F dans $\mathbb{R}$, alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $(]a_k,b_k[)_{k\in I}$ une partion de Ω, où I est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $a_k<b_k$ pour tout k, on a : $\Omega=\bigcup\limits_{k\in I}]a_k,b_k[$.
Si I est fini, la fonction f telle que $f(x)=\sum\limits_{k\in I}h(-(x-a_k)(x-b_k))$ pour tout x, est une fonction de classe C^∞ a support compact($Supp(f)\subset\bigcup\limits_{k\in I}[a_k,b_k]$.) avec $Z(f)=F$. Donc la théorème est démonté.
Si I est infini, on se ramène à $I=\mathbb{N}$ et on considère la fonction

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}h_k \quad \text{où} \quad h_k(x)=h(-(x-a_k)(x-b_k)) \text{ pour tout } x,$$

on a : f est de classe C^∞ et que $Z(f)=F$.