Correction : Devoir surveillé n°3

MP Clemenceau 2022-23

Jeudi 20 octobre 2022

En rouge : des commentaires pour comprendre mais à ne pas écrire lors de la rédaction.

Exercice d'algèbre

- Première partie-

1) Lister les éléments inversibles (en précisant leur inverse) de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et ceux de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Correction : *En utilisant le cours (de cet année) on peut dire que* les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les classes d'équivalences (de congruence) des entiers p tels que p et n sont premiers entre eux.

Il suffit alors d'énumérer les inverses par calcul : les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $\overline{1}$, $\overline{5}$ qui sont leurs propres inverses.

En revanche tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ sont inversibles, avec

$$\overline{1} = \overline{1} \times \overline{1} = \overline{2} \times \overline{7} = \overline{3} \times \overline{9} = \overline{4} \times \overline{10} = \overline{5} \times \overline{8} = \overline{6} \times \overline{11}$$

2) Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que si p et $p + 2$ sont premiers, alors $p \equiv -1[6]$.

Correction : Pour $p > 5$, p et $p + 2$ premiers implique que p (et donc $p + 2$) sont impairs donc $p + 1$ est pair. De plus p, $p+1$ et $p+2$ sont 3 entiers successifs, l'un des 3 est donc divisible par 3. Or p et $p+2$ sont des nombres premiers supérieurs à 5, ils ne sont donc pas divisibles par 3. On en déduit que $p + 1$ est un multiple de 3. Comme il est aussi pair c'est un multiple de 6 donc $p + 1 \equiv 0[6]$ d'où le résultat.

on peut faire par contraposé en regardant les différents cas de valeurs de la classe de congruence de p.

3) Montrer que le polynôme $X^2 - \overline{5}$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}[X]$.

Correction : Un polynôme de degré deux est irréductible si et seulement si il n'a pas de factorisation non triviale, c'est-à-dire si et seulement si il n'a pas de racine. Or $\overline{5}$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ (les carrés sont $\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{3}, \overline{12}, \overline{10}$) et donc $X^2 - \overline{5}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}[X]$.

- Deuxième partie -

Soit $(A, \star, \diamondsuit)$ un anneau d'élément unité 1_A, on note $U(A) = \{a \in A \mid \exists c \in A, a\diamondsuit c = 1_A\}$ l'ensemble des éléments inversibles de A.

4) Montrer que $(U(A), \diamondsuit)$ est un groupe.

Correction : *C'est du cours : l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau, muni de la multiplication, est un groupe.*

La loi est interne et associative ($(A, \star, \diamondsuit)$ est dans un anneau). 1_A est l'élément neutre pour cette loi de composition interne. Par ailleurs le produit de a, b inversibles est encore inversible, d'inverse le produit des inverses ; et l'inverse d'un élément inversible est inversible.

Conclusion : $(U(A), \diamondsuit)$ est un groupe.

5) Montrer en utilisant le théorème de Bezout que le groupe $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est l'ensemble :

$$V = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid a \wedge n = 1\}.$$

Correction : *c'est encore du cours de cette année, mais il est bon de savoir le réécrire correctement.*

$\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \exists \overline{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \overline{a}.\overline{u} = \overline{1} \iff \exists u \in \mathbb{Z} \mid au \equiv 1\ [n] \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid au = 1 + vn$.

On reconnaît l'identité de Bezout, qui équivaut à $a \wedge n = 1$.

Conclusion : $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = V$.

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble :

$$D = \left\{\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \left\{\overline{0}\right\} \mid a \wedge n \neq 1\right\}.$$

Correction :

$$\exists \overline{b} \neq \overline{0} \mid \overline{a}.\overline{b} = \overline{0} \iff \exists b \notin n\mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} \mid ab = kn$$

Si a était premier avec n, par le théorème de GAUSS, n qui divise ab, diviserait b. On trouve donc que a et n ont un facteur commun $d > 1$. Réciproquement, si $a \wedge n = d1$, avec $d \neq 1$ alors pour $b = n/d$ on a bien

$$\bar{b} \neq \bar{0}, \qquad \bar{a}.\bar{b} = \overline{ab} = \bar{0}$$

Donc l'ensemble des diviseurs de 0 est D.

- Troisième partie -

On note K_{13} l'ensemble $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ que l'on munit des lois de composition suivantes :

$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$

$(x, y) \bullet (x', y') = \big(xx' + \bar{5}yy', xy' + x'y\big)$

Pour $\alpha \in K_{13}$, on note $\alpha^2 = \alpha \bullet \alpha$.

7) Montrer que $(K_{13}, \oplus, \bullet)$ est un corps commutatif à 169 éléments.

Correction : l'ensemble K_{13} muni de la première loi de composition interne est le groupe produit.
Il est clair que la loi $\bullet$ est interne. Il faut vérifier qu'elle est associative. *long mais à faire*
La loi $\bullet$ est clairement commutative commutative par propriété de la loi multiplicative sur $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
Ensuite cette loi $\bullet$ admet un élément neutre, $\mathbf{1} = (\bar{1}, \bar{0})$. On vérifie que $\bullet$ est **distributive** par rapport à $\oplus$. *encore long mais à faire*
On a montré que K_{13} est un anneau commutatif.
Pour prouver que K_{13} est un corps il faut montrer que tout élément non nul est inversible.
Soit $(x, y) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ et cherchons x', y' tels que $xx' + \bar{5}yy' = \bar{1}$ et $xy' + yx' = \bar{0}$.
En multipliant par y la première équation, il vient $y = xx'y + \bar{5}y^2y' = \bar{5}y^2y' - x^2y' = -y'(x^2 - \bar{5}y^2)$.
De même on trouve $x = x'(x^2 - \bar{5}y^2)$.
Si $y = \bar{0}$ on a $y' = \bar{0}, x' = x^{-1}$.
On peut alors voir que dans ce cas, $x^2 - \bar{5}y^2$ n'est jamais nul. Sinon xy^{-1} serait une racine du polynôme $X^2 - \bar{5}$ et il n'y en a pas, d'après **I 3°)**. Or un élément non nul de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ y admet un inverse.
On peut donc résoudre : $x' = (x^2 - \bar{5}y^2)^{-1}x$ et $y' = -(x^2 - \bar{5}y^2)^{-1}y$.
On a montré que K_{13} est un corps. Comme ensemble c'est $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^2$, il a 169 éléments.

8) Soit $H_{13} = \big\{\big(x, \bar{0}\big) \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\big\}$ un sous-ensemble de K_{13}. Montrer que $(H_{13}, \oplus, \bullet)$ est un sous-corps isomorphe à $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +, .)$.

Correction : en considérant l'application $x \mapsto (x, \bar{0})$ de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^2$, on montre que c'est un morphisme de corps qu'il est injectif d'où le résultat.

9) Désormais, on identifie H_{13} et $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ en identifiant x et $\big(x, \bar{0}\big)$. Trouver les éléments α de K_{13} tels que $\alpha^2 = \bar{5}$ et factoriser $X^2 - \bar{5}$ dans $K_{13}[X]$.

Correction : Posons $\alpha = (x, y)$, il vient $\alpha^2 = (x^2 + \bar{5}y^2, 2xy) = (\bar{5}, \bar{0})$. On a donc $xy = \bar{0}$ et cela conduit rapidement aux deux solutions : $\alpha = (\bar{0}, \bar{1})$ ou $\beta = (\bar{0}, -\bar{1})$.
Dans $K_{13}[X]$ on peut donc écrire

$$X^2 - \bar{5}(= X^2 - (\bar{5}, 0)!) = (X - (\bar{0}, \bar{1}))(X + (\bar{0}, \bar{1})) = (X - \alpha)(X + \alpha)$$

Problème d'analyse niveau CCINP

Théorème du point fixe et applications

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de Picard et d'en voir plusieurs applications.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 1 *Une application de E dans est une* ***contraction stricte de rapport*** *k si elle est k-lipschitzienne et que $k \in]0, 1[$.*

On notera, pour $n \in \mathbb{N}$ et $f : E \to E$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = Id_E$.

I) Démonstration

On suppose que E est de dimension finie.

Soit f une application de E dans lui même, contraction stricte de rapport k. Pour $a \in E$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1) Pour tout entier naturel n on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\|u_{n+1}\| \leq k \|u_n\|$, puis que $\|u_n\| \leq k^n \|f(a) - a\|$.
En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Correction : soit $n \in \mathbb{N}$, comme f est k-contractante on a $\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\|$. Ce qui s'écrit encore $\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\|$, c'est à dire $\|u_{n+1}\| \leq k \|u_n\|$.
Par récurrence on en déduit que, pour tout entier n, $\|u_n\| \leq k^n \|u_0\|$, . On a, par définition de la suite $u_0 = x_1 - x_0 = f(a) - a$, d'où, pour tout entier naturel n, $\|u_n\| \leq k^n \|f(a) - a\|$.
Comme on a $k < 1$ la série $\sum k^n$ est convergente. On en déduit, par comparaison, que la série $\sum \|u_n\|$ est aussi convergente.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un espace de dimension finie, on en déduit que la série $\sum u_n$ est aussi convergente.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $\ell \in E$.

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a, par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Comme la série $\sum u_n$ est convergente on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

c) Montrer que ℓ est un point fixe de f, c'est à dire $f(\ell) = \ell$.

Correction : l'application f étant lipschitzienne elle est continue. Par propriété séquentielle de la continuité, de l'égalité $f(x_n) = x_{n+1}$ vraie pour tout n, on déduit, par passage à la limite, que $f(\ell) = \ell$. ℓ est donc bien un point fixe de f.

d) Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction : si on suppose qu'il existe deux points fixes distincts l et l'.
On a alors $\|f(l) - f(l')\| \leq k \|l - l'\|$ et donc $\|l - l'\| \leq k \|l - l'\|$, ce qui est impossible car $k < 1$. Donc f admet un unique point fixe.

On vient de montrer le théorème du point fixe de Picard dans le cas particulier où E est de dimension finie.
Théorème du point fixe de Picard : dans un espace de dimension finie $(E, \| \|)$, une application $f : E \to E$ qui est une contraction stricte admet un unique point fixe et pour tout $a \in E$, la suite des itérés $(f^n(a))_{\in\in\mathbb{N}}$ converge ce point fixe.

II) Exemples et contre exemples

2) Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte.

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$$

a) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|g'(t)| < 1$.
En déduire que l'on a, pour tout x et y réels : $|g(x) - g(y)| < |x - y|$

Correction : g est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a $\forall t \in \mathbb{R}\ g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$.
Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{1}{1+t^2} \in]0,1]$ d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|g'(t)| < 1$.
Soit x et y deux réels distincts, d'après l'égalité des accroissements finis on a l'existence d'un réel $c \in]x, y[$ (ou $c \in]y, x[$) tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. On en déduit, avec l'inégalité trouvée précédemment, que $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.

b) La fonction g admet-elle un point fixe ?
Est-elle une contraction stricte ?
Correction : si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = a$ alors on aurait $\dfrac{\pi}{2} = \arctan(a)$, ce qui est impossible.
Donc la fonction g n'admet pas de point fixe.
Elle ne peut donc pas être contractante stricte sinon il y aurait un point fixe.

3) Un exemple
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = f \circ g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{1}{5}x + 1$$

a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 1$ pour tout entier n.
A l'aide de la première question, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on précisera.
Correction : la relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = \frac{1}{5}x + 1$. Or comme on a pour tout x et y $|g(x) - g(y)| = \frac{1}{5}|x - y|$ cette fonction est strictement contractante, elle admet donc un point fixe qui est $\frac{5}{4}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(g^n(x)) = f(x)$.
Correction : il suffit d'écrire une récurrence rapide.

c) En déduire que f est une fonction constante.
Correction : d'après la question a), pour tout x la suite définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers $\frac{5}{4}$. Comme la fonction f est continue, par passage à la limite on a, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = g^n(x)$,

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f\left(\frac{5}{4}\right)$$

La fonction f est donc bien constante.

4) Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$
On s'intéresse dans cette question au système :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} 4x &= \sin(x+y) \\ 3y &= 3 + 2\arctan(x-y) \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \|_1$, c'est à dire définie par $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y)\ ,\ 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right)$$

a) Démontrer que pour tout a et b réels, on a :

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leqslant |b-a| \qquad \text{et} \qquad |\arctan(b) - \arctan(a)| \leqslant |b-a|$$

Correction : il suffit d'utiliser l'inégalité des accroissements finis.

b) Montrer que ψ est une contraction stricte de $\left(\mathbb{R}^2, \| \|_1\right)$ dans lui même.
Correction : Il suffit d'utiliser les inégalités qui précèdent et on obtient une application strictement contractante de rapport $\frac{11}{12}$.

c) En déduire que le système $(\mathcal{S})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
Correction : ψ étant une contraction stricte, elle admet un point fixe unique (a,b) : $(a,b) = \psi(a,b)$, ce point n'est autre que la solution du système (S).

d) On munit pour cette question, $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \|_\infty$ définie par $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$.
Déterminer $\left\|\psi\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-\psi(0,0)\right\|_\infty$.
L'application ψ est-elle encore une contraction stricte pour la norme $\| \|_\infty$?
Quel commentaire peut-on faire ?
Correction : On a $\left\|\psi\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-\psi(0,0)\right\|_\infty = \frac{\pi}{6}$. L'application ψ n'est pas une contraction stricte car pour tout $k \in [0,1[$, on a $\left\|\psi\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-\psi(0,0)\right\|_\infty = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} > \frac{k}{2} = \left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(0,0)\right\|_\infty$. Suite à l'exemple ci-dessus, une contraction pour une norme peut ne pas l'être pour une autre norme équivalente. La contractibilité dépend alors de la métrique choisie. La condition de contractibilité n'est qu'une condition suffisante mais pas nécessaire pour avoir un point fixe.

III) Un équation intégrale

5) Soit F l'espace vectoriel des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in F$ on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On note aussi E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer soigneusement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur F.
Correction : cf cours

On admet pour la suite du problème que le théorème de Picard est encore applicable sur cet espace.

b) Justifier que $E \subset F$.
Correction : toute fonction continue sur un segment est bornée...

c) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ convergeant vers une fonction f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors f est aussi continue sur $[0,1]$.
Correction : cf cours sur suites de fonctions. L'idée principale étant

$$|f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(a)| + |f_n(a)-f(a)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand fixé, pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)-f_n(t)| \leqslant \|f-f_n\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{3}$, et par continuité de f_n, $|f_n(x)-f_n(a)| \dfrac{\varepsilon}{3}$, d'où $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

6) On considère une application continue $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, ainsi que $g \in E$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère Φ l'application définie sur E, qui à f associe :

$$\forall x \in [0,1] \quad \Phi(f)(x) = g(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

a) Justifier l'existence de $M = \max\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x,y)|$.
Correction : K est continue sur le compact $[0,1]^2$.

On admet que $\Phi(f)$ est un élément de E.

b) On suppose que $|\lambda| < M^{-1}$. Vérifier que Φ est une contraction stricte de $(E, \|\cdot\|)$ et en déduire qu'il existe une unique fonction f dans E telle que :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

Correction : on a, après calculs, $\|\Phi(f_1)-\Phi(f_2)\|_\infty \leqslant |\lambda|\, M\, \|f_1-f_2\|_\infty$, or par hypothèse $|\lambda|\, M < 1$, donc Φ est bien une contraction stricte de $(E, \|\cdot\|)$.
On applique alors le théorème de Picard.

Partie niveau Mines

Problème d'analyse niveau Mines

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous- espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

La question préliminaire et les parties A, B, C et D
sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$.

Raisonnons par récurrence.

On a pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_1} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_1 = 0$.

Soit $m \in [\![1, n-1]\!]$, supposons que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\lambda_k = 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$ et donc pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_{m+1} + \sum\limits_{k=m+2}^{n} \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_{m+1}} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_{m+1} = 0$.

Par le théorème de récurrence on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Par suite la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

Enfin la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

A) Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (X + b_k)}.$$

2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

Correction : On suppose $R(X)$ est de la forme $R(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$.
On multiplie la dernière colonne C_n par A_n et on lui ajoute la combinaison linéaire des autres colonnes $\sum\limits_{i=1}^{n-1}A_kC_k$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
A_nD_n &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots\cdots & R(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On développe par rapport à la dérnière colonne, on obtient

$$A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}$$

3) En déduire que

$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\le i<j<\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}.$$

Correction : S'il existe $(k_1,k_2)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $k_1\neq k_2$ et $a_{k_1}=a_{k_2}$ ou $b_{k_1}=b_{k_2}$ alors $D_n=0$, et alors

$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}$$

Supposons maintenant que les termes de la suite $(a_k)_{1\le k\le n}$ sont deux à deux distincts ainsi pour la suite $(b_k)_{1\le k\le n}$.

Par récurrence montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $D_n=\dfrac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}$.

Pour $n=1$ on a $D_1=\dfrac{1}{a_1+b_1}$.

Soit $n\ge 2$, supposons que $D_{n-1}=\dfrac{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n-1\\1\le j\le n-1}}(a_i+b_j)}$.

On a d'après la question précédente

$$A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}$$

On a $R(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$ donc $A_n=((X+b_n)R(X))_{x=-b_n}=\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n+b_k)}=\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}$

et $R(a_n)=\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}$ donc puisque $A_n\neq 0$ (car $R(a_n)D_{n-1}\neq 0$)

$$D_n=\frac{R(a_n)}{A_n}D_{n-1}=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}$$

D'après le théorème de récurrence on a donc le résultat pour tout n non nul.

B) Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.
Correction : On a :

$$d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a \in A \ , \|x - a\| < \varepsilon \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \text{ est adhérent à } A.$$

5) Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_{n\to\infty} d(x, A_n)$.
Correction : Supposons que $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de parties de E telle que $A = \underset{n\geqslant 0}{\cup} A_n$.
Soit $x \in E$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = d(x, A_n)$ et $\beta = d(x, A)$.
Puisque $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante et $A = \underset{n\geqslant 0}{\cup} A_n$, alors $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante minorée par β, donc la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel α, on a, de plus, $\beta \leq \alpha$.
Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la borne inférieure définissant la distance $d(x, A)$, il existe $y \in A$ tel que $\beta \leqslant \|y - x\| < \beta + \varepsilon$
$y \in A$ donc il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_0}$ et alors $\alpha_{n_0} \leq \|y - x\| < \beta + \varepsilon$.
donc $\alpha < \beta + \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout ε, on a $\alpha \leqslant \beta$.
Conclusion : $d(x, A) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $B = \{y; \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.
Correction : Pour tout $y \in B$ on a : $\|y\| \leqslant \|y - x\| + \|x\| \leqslant 2\|x\|$
On en déduit que $B \subset \overline{B}(0, 2\|x\|)$ donc B est bornée.
B est un fermé de E.
Ainsi $B \cap V$ fermée bornée de V qui est de dimension finie, donc $B \cap V$ est compacte.
Soit $x \in E$, on a $B \cap V \subset V$ donc $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$.
Soit $y \in V$,
si $y \in B$ alors $y \in B \cap V$ et donc $d(x, B \cap V) \leq d(x, y)$.
si $y \notin B$ alors $\|y - x\| > \|x\| = \|x - 0\| \geq d(x, B \cap V)$ car $0 \in B \cap V$, donc pout tout $y \in V$,
$d(x, B \cap V) \leq d(x, y)$, donc $d(x, B \cap V) \leq d(x, V)$.
Ainsi $d(x, B \cap V) = d(x, V)$.

7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.
Correction : On a l'application $\begin{array}{ccc} B \cap V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|y - x\| \end{array}$ est continue sur le compact $B \cap V$, donc bornée et atteint sa borne inférieure sur $B \cap V$, alors il existe $y \in B \cap V$ tel que $d(x, B \cap V) = \|x - y\|$.
D'après la question **6)** $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ donc $d(x, V) = \|x - y\|$.

C) Partie à ne pas traiter mais à admettre :
Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.
Correction : Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et π la projection orthogonale sur V (elle existe car V est de dimension finie donc il admet un supplémentaire orthogonal)
Soit $x \in E$, , on a pour tout $v \in V$, $\| x - v \|^2 = \| x - \pi(x) \|^2 + \| \pi(x) - v \|^2$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$ et $\pi(x) - v \in V$.

donc pour tout $v \in V$ $\| x - \pi(x) \|^2 \leq \| x - v \|^2$ et alors $\| x - \pi(x) \| \leq d(x, V)$
Comme $\pi(x) \in V$ alors $d(x, V) = \| x - \pi(x) \|$.
Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$, alors $\| x - \pi(x) \| = \|x - y\|$
On a $\| x - y \|^2 = \| x - \pi(x) \|^2 + \| y - \pi(x) \|^2$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$ et $y - \pi(x) \in V$.
donc $\| y - \pi(x) \|^2 = 0$ et alors $y = \pi(x)$.
D'où l'unicité.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1 \mid x_1) & (x_1 \mid x_2) & \cdots & (x_1 \mid x_n) \\ (x_2 \mid x_1) & (x_2 \mid x_2) & \cdots & (x_2 \mid x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n \mid x_1) & (x_n \mid x_2) & \cdots & (x_n \mid x_n) \end{pmatrix}.$$

9) Montrer que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.
Correction : Soient $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ et V un sous espce vectoriel de E de dimension n contenant $Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de V et $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, ..., x_n)$. la matrice du système de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
On a $M(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tM.M$.
En effet, posons pour tout $j \in [[1, n]]$, $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, on a $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Posons ${}^tM.M = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (x_i \mid x_j)$.
Donc $rg(M(x_1, x_2, ..., x_n)) = rg({}^tM.M) = rg(M) = rg(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ainsi $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée.

10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Correction : On suppose que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre.
Soit $x \in E$.
On a

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid x) \\ & M(x_1, x_2, ..., x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n \mid x) \\ (x \mid x_1) & \cdots & (x \mid x_n & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

Soit π le projecteur orthogonal sur V.
$\forall i \in [[1, n]]$, $(x_i \mid x) = (x_i \mid \pi(x)) + (x_i \mid x - \pi(x)) = (x_i \mid \pi(x))$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$.
$\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2$.
donc

$$G(x_1,x_2,...,x_n,x) = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & M(x_1,x_2,...,x_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi(x)\mid x_1) & \cdots & (\pi(x)\mid x_n & \|x-\pi(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} & & & (x_1\mid\pi(x)) \\ & M(x_1,x_2,...,x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n\mid\pi(x)) \\ (\pi(x)\mid x_1) & \cdots & (\pi(x)\mid x_n & \|\pi(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \|x-\pi(x)\|^2 G(x_1,x_2,...,x_n) + G(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))$$

On a d'après 9) $rg(M(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))) = rg(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))$
Donc $G(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x)) = 0$ car $\pi(x)\in V = Vect(x_1,x_2,...,x_n)$.
Ainsi

$$G(x_1,x_2,...,x_n,x) = \|x-\pi(x)\|^2 G(x_1,x_2,...,x_n).$$

D'autre part $d(x,V) = \|x-\pi(x)\|$ et $G(x_1,x_2,...,x_n)\neq 0$ car la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est libre, donc

$$d(x,V)^2 = \frac{G(x_1,x_2,...,x_n,x)}{G(x_1,x_2,...,x_n)}$$

D) Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f\in C([0,1])$, la notation $d(f,A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11) Montrer que pour tout $f\in C([0,1])$, $N_2(f)\leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.
Correction : Soit $f\in C([0,1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de $C([0,1])$ et $f\in\overline{A}^\infty$ alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(f_n-f) = 0$.
Comme $0\leq N_2(f_n-f)\leq N_\infty(f_n-f)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f_n-f) = 0$ et donc $f\in\overline{A}^2$.
Ainsi $\overline{A}^\infty\subset\overline{A}^2$

On considère l'ensemble $V_0 = \big\{f\in C([0,1]); f(0)=0\big\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

12) Montrer que $\phi_0\in\overline{V_0}^2$.
Correction : ϕ_0 désigne la fonction constante 1.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $C([0,1])$ définie par :

$$\forall n\geq 1\ ,\ \ f_n(x) = \begin{cases} n.x & \text{si} \quad x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in V_0$.

$$(N_2(f_n-\phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x)-1|^2\,dx = \frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\phi_0\in\overline{V_0}^2$.

13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.
Correction : Soit $g \in C([0,1])$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f \in V_0$ et $g = f + g(0)\phi_0$.
On a $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$ donc il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V_0 telle que
$\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g(0)\varphi_n - g(0)\phi_0) = |g(0)| \lim\limits_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\ g_n = f + g(0)\varphi_n$, on a $g_n \in V_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g_n - g) = 0$.
Donc $g \in \overline{V_0}^2$ et alors V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.
On a $\phi_0 \notin \overline{V_0}^\infty$, en effet , sinon il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de V_0 qui converge uniformément vers ϕ_0.
En particulier $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et donc $\phi_0(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ ce qui est absurde.
Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.
Correction : Supposons que V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.
On a $V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \varnothing$.
Soient x et y deux éléments de $\overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y.
On a la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V converge vers $x + \lambda y$.
Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$et alors $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.
Correction : Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty = C([0,1])$.
Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ et soit $f \in C([0,1])$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définie sur $[0,1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ et $\overline{V}^\infty$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overline{V}^\infty$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overline{V}^\infty$ pour la norme N_∞ qui est égal à $\overline{V}^\infty$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.
Correction : Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2 = C([0,1])$.
Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$ et soit $f \in C([0,1])$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définies sur $[0,1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

D'après la question 11) on alors

$$N_2(P - f) \leq \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$ et $\overline{V}^2$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overline{V}^2$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overline{V}^2$ pour la norme N_2 qui est égal à $\overline{V}^2$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

E) Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \le k \le n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \ge 0$.

Correction : On a la suite $(W_n)_{n\ge 0}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $C([0,1])$ et $W = \bigcup\limits_{n\ge 0} W_n$ donc d'après la question 5) pour tout entier $\mu \ge 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W)$.

Supposons que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et soit ϕ_μ telle que μ entier positif, on a d'après la question 4) $d(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \ge 0$ alors

$d(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout entier $\mu \ge 0$ et donc d'après la question 4) pour tout entier entier $\mu \ge 0$, $\phi_\mu \in \overline{W}^2$ l'adhérence de W pour la norme N_2 et alors d'après la question 16) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

18) Montrer que pour tout $\mu \ge 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

Correction : On a d'après les questions 1) et 10)

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n})}$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$, on a $(\phi_\alpha \mid \phi_\beta) = \int_0^1 x^\alpha . x^\beta dx = \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$

Posons $\forall k \in [[0,n]]$ $\beta_k = \lambda_k + 1$ et $\beta = \mu + 1$.

On a $\forall k \in [[0,n]]$ $\lambda_k + \beta_k \ne 0$ et $\mu + \beta \ne 0$.

On a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta} \\ \dfrac{1}{\mu+\beta_0} & \dfrac{1}{\mu+\beta_1} & & \dfrac{1}{\mu+\beta_n} & \dfrac{1}{\mu+\beta} \end{vmatrix}$$

D'après la partie **A)** on a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \frac{\prod\limits_{0\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}} (\lambda_i + \beta_j)} \times \frac{\prod\limits_{0\le i\le n} (\mu - \lambda_i)(\beta - \beta_i)}{(\mu+\beta) \prod\limits_{0\le i\le n} (\mu + \beta_i) \prod\limits_{0\le i\le n} (\lambda_i + \beta)}$$

De même on a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}) = \frac{\prod\limits_{0\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}} (\lambda_i + \beta_j)}$$

donc

$$\begin{aligned} d(\phi_\mu, W_n)^2 &= \frac{\prod\limits_{0\le k\le n} (\mu - \lambda_k)(\beta - \beta_k)}{(\mu+\beta) \prod\limits_{0\le k\le n} (\mu + \beta_k) \prod\limits_{0\le i\le n} (\lambda_k + \beta)} \\ &= \frac{\prod\limits_{0\le k\le n} (\mu - \lambda_k)^2}{(2\mu+1) \prod\limits_{0\le k\le n} (\lambda_k + \mu + 1) \prod\limits_{0\le i\le n} (\lambda_k + \mu + 1)} \end{aligned}$$

et par suite

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)
Correction : Soit $\mu \geq 0$. Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
alors il est clair que la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

Réciproquement, supposons que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
Soit $\mu > 0$.
Considérons la fonction $h(x) = \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$ pour tout $x \in [0, \mu]$.
On a h est dérivable sur $[0, \mu]$ et pour tout $x \in [0, \mu]$ $h'(x) = -\dfrac{1 + 2u}{(x + \mu + 1)^2} \leq 0$.
Donc $\forall x \in [0, \mu]$, $0 \leq h(x) \leq \dfrac{\mu}{\mu + 1} = h(0)$.
Soit $\alpha = \dfrac{2\mu + 1}{2(\mu + 1)}$, on a $\alpha \in \left]\dfrac{\mu}{\mu + 1}, 1\right[$.
La suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ on ait

$$h(\lambda_k) = \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} > \frac{2\mu + 1}{2(\mu + 1)} \quad .$$

donc $\forall k \geq k_0$, $\lambda_k > \mu$.
Ainsi la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
Correction : D'après la question 17) l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.
Donc il suffit de montrer que : $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0 \Longleftrightarrow$ la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
On a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels > 0 deux à deux distincts.
Supposons pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ alors en particulier pour $\mu = 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k + 1} = 0$,
donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_k}\right) = +\infty$.
D'autre part on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(1 + x) \leq x$.
Donc $\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\lambda_k}$ et alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\lambda_k} = +\infty$.
Ainsi la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
Réciproquement supposons la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier positif .
La suite $(d(\phi_\mu, W_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc converge , soit $\alpha = \lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n)$.
On a $\alpha = 0$.
Car sinon $\alpha > 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} = 1.$$

D'après la question 19) on a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ $\lambda_k > \mu$.
Posons $\forall k \geq 0$, $u_k = \ln\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_k}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{\mu + 1}{\lambda_k}\right)$.

On a $u_k = -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k} + \underset{k\longmapsto+\infty}{\circ}\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\right)$ donc $u_k \underset{k\longmapsto+\infty}{\sim} -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$.

Comme la série $\sum\limits_k -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$ diverge et à termes de signe constant, alors la série $\sum\limits_k u_k$ diverge et vaut $-\infty$.

D'autre part, en posant $A = \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \ln\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)$ on a

$$\ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\frac{1}{2}\ln(2\mu+1) + A + \sum_{k=k_0}^{n} u_k.$$

et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\infty$, donc $\alpha = 0$ ce qui est absurde.

Il y a une dernière partie mais cela fait trop long.