# **Correction :** Devoir surveillé n°2

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 19 octobre 2023

## Premier problème

Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Pour $u$ endomorphisme de $E$ et $n$ entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ ($n$ fois).

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et $I_3$ la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

### Partie A

**1)** On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice $A$ est semblable à la matrice $B$.

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices $A$ et $B$ **sont** semblables.

**Correction :** La relation considérée est **réflexive** : $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = I_3 A I_3$ et $I_3 = I_3^{-1}$.
Elle est **symétrique**, car si $A = P^{-1}BP$, alors $B = PAP^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1}$, enfin elle est **transitive**, car si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors $A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1} C(QP)$.
La relation est donc une relation d'équivalence.

**2)** Démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.
**Correction :** On sait que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants (c'est un morphisme multiplicatif), donc, si $A \sim B$, alors $\det A = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det P^{-1} \det B \det P$, et comme $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$, il vient $\det A = \det B$. On conclut alors par contraposition.

**3)** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et soit $i$ et $j$ deux entiers naturels.
On considère l'application $w$ de $\ker u^{i+j}$ vers $E$ définie par : $w(x) = u^j(x)$.

(a) Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \ker u^i$.
**Correction :** Soit $y \in \operatorname{Im} w$, alors il existe $x \in \ker u^{i+j}$, $y = w(x) = u^j(x)$. On en déduit : $u^i(y) = u^{i+j}(x)$. Or $x \in \ker u^{i+j}$, donc $u^i(y) = 0$. Conclusion : $\operatorname{Im} w \subset \ker u^i$.

(b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leqslant \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.
**Correction :** Utilisons le théorème du rang sur $w$ : $\dim(\ker(w)) + rg(w) = \dim(\ker(u^{i+j}))$ donc

$$\dim(\ker(u^j)) + \dim(\operatorname{Im}(w)) = \dim(\ker(u^{i+j}))$$

Avec l'inclusion précédente, on peut conclure : $\boxed{\dim(\ker(u^{i+j})) \leqslant \dim(\ker(u^j)) + \dim(\ker(u^i))}$

**4)** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.

(a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).
**Correction :** D'une part, $u^3 = u^{2+1}$, donc 3)b donne $3 = \dim\ker u^3 \leqslant \dim\ker u^2 + \dim\ker u$, et, comme $rg\ u = 2$, on a : $\dim\ker u = 1$ (th. du rang).
D'autre part $u^2 = u^{1+1}$, donc $\dim\ker u^2 \leqslant 1 + 1$. Finalement on obtient : $2 \leqslant \dim\ker u^2 \leqslant 2$, ce qui permet de conclure : $\dim\ker u^2 = 2$

(b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur $a$ non nul de $E$ tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $E$.
**Correction :** De $\dim\ker u^2 = 2$, on peut déduire $rg\ u^2 = 1$, il existe donc un vecteur $a$ non nul tel que $u^2(a) \neq 0$. Supposons que les réels $\alpha, \beta, \gamma$ soient tels que $\alpha a + \beta u(a) + \gamma u^2(a) = 0$, alors par application de $u^2$ (linéaire), on trouve $\alpha u^2(a) = 0$, puisque $u^3 = 0$, de même que $u^4 = 0$, d'où $\alpha = 0$, puis, en appliquant $u$, on trouve $\beta = 0$ et il reste $\gamma u^2(a) = 0$, ce qui donne $\gamma = 0$. La famille $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est donc libre, elle est formée de 3 vecteurs, dans $E$ de dimension 3, c'est donc une base de $E$.

(c) Ecrire alors la matrice $U$ de $u$ et la matrice $V$ de $u^2 - u$ dans cette base.

**Correction :** On a $u^3(a) = 0$, puis $u^2(a) = 1.u^2(a)$ enfin $u(a) = 0.u^2(a) + 1.u(a) + 0.a$. Donc $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**5)** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 1$.

(a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur $b$ non nul de $E$ tel que $u(b) \neq 0$.

**Correction :** Puisque $rg\ u = 1$, l'image de $u$ est une droite vectorielle, il existe donc un vecteur $b$ non nul, d'image non nulle par $u$.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur $c$ de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de $E$.

**Correction :** D'une part $u^2 = 0$, donc $u^2(b) = 0$, ce qui entraîne $u(b) \in \ker u$, d'autre part, $\dim \ker u = 2$, donc le vecteur non nul $u(b)$ de $\ker u$ peut être complété par un vecteur $c$ de $\ker u$ pour que la famille $(u(b), c)$ forme une base de $\ker u$ ; il nous reste à vérifier que la famille $(b, u(b), c)$ est libre. Or, si $\alpha b + \beta u(b) + \gamma c = 0$, alors, par application de $u$, on trouve $\alpha = 0$, puis, la famille $(u(b), c)$ étant libre, on trouve $\beta = \gamma = 0$. Conclusion la famille considérée est libre et elle a un cardinal égal à la dimension de $E$, c'est donc une base de $E$.

(c) Ecrire alors la matrice $U'$ de $u$ et la matrice $V'$ de $u^2 - u$ dans cette base.

**Correction :** On a $u(b) = 0.b + 1.u(b) + 0.c$, $u(u(b)) = 0$ et $u(c) = 0$, donc $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Partie B

Soit désormais une matrice $A$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice $A$ est semblable à son inverse $A^{-1}$.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice $P$ de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

**6)** Expliquer pourquoi la matrice $A$ est bien inversible.

**Correction :** On a $\det T = 1$ et $A$ est semblable à $T$, donc $\det A = 1$, ce qui prouve que $A$ est inversible.

**7)** Calculer $N^3$ et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

**Correction :** $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $N^3 = 0$. On a alors : $\left(I - N + N^2\right)(I + N) = I - N^3 = I$, car la matrice $N$ commute avec $I$ et les puissances de $N$. On en déduit $T^{-1} = I - N + N^2$. Autrement dit, $\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = I - N + N^2$. On peut conclure en remarquant que $\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$. (on a utilisé la formule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ )

**8)** On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

**Correction :** Si $N = 0$, alors $T = I$, donc $A = I = A^{-1}$. Conclusion : $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

**9)** On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice $N$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une matrice semblable à la matrice $M$.

**Correction :** Comme $rg\ N = 2$, et $N^3 = 0$, appelons $u$ l'endomorphisme de matrice $N$ dans la base canonique de $E$, d'après la question 4)c. il existe une base de $E$ dans laquelle $u$ a pour matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $N$ est semblable à $U$ et la matrice $M$ est semblable à $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Calculer $M^3$ et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.

**Correction :** D'après la question 7), on a $V^3 = 0$, donc aussi $M^3 = 0$. D'autre part, le rang de $V$ est 2, car le sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes est de dimension 2. Les automorphismes conservent la dimension, donc si $P \in GL_3(\mathbb{R})$, les matrices $V$, $VP$ et $P^{-1}VP$ ont le même rang. Conclusion, le rang de $M$ est 2.

(c) Montrer que les matrices $M$ et $N$ sont semblables.

**Correction :** On a $N^3 = 0$ et $rg\ N = 2$, de même que $M^3 = 0$ et $rg\ M = 2$. Donc $N$ et $M$ sont semblables à la même matrice $V$. Par transitivité, on en déduit que $M$ et $N$ sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

**Correction :** On sait que $A$ est semblable à $T = I + N$ et $A^{-1}$ est semblable à $I - N + N^2 = I + M$. Il suffit de remarquer que si $M = Q^{-1}NQ$, alors $I + M = Q^{-1}(I + N)Q$, pour constater que $A$ et $A^{-1}$ sont semblables à deux matrices semblables entre elles, elles sont donc semblables.

**10)** On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

**Correction :** Ici $rg\ N = 1$, alors l'un au moins des deux coefficients $\alpha$ et $\gamma$ est nul (sinon le rang serait 2, car il y aurait deux pivots non nuls), le calcul de 7) montre alors que $N^2 = 0$.
On a vu dans la partie A.5) que $N$ est semblable à $U'$ et $M$ à $V'$. Or $U'$ et $V'$ sont semblables car si $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$, on vérifie aisément $V' = P^{-1}U'P$ ; donc en raisonnant comme ci-dessus, $N$ et $M$ sont semblables puis $I + N$ et $I + M$ le sont aussi et enfin $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

**11) Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $(a, b, c)$ une base de $E$ et $u$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans cette base.

(a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 2 dont on donnera une base $(e_1, e_2)$.

**Correction :** Déterminons $\ker(u - id_E)$, c'est l'ensemble des vecteurs de coordonnées $(x, y, z)$ dans la base $(a, b, c)$ tels que $\begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, on reconnaît une équation de plan. Une base est, par exemple $(e_1, e_2) = (a, b - c)$.

(b) Justifier que la famille $(e_1, e_2, c)$ est une base de $E$, et écrire la matrice de $u$ dans cette base.

**Correction :** La matrice des coordonnées de la famille $(a, b - c, c)$ dans la base $(a, b, c)$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cette matrice a pour déterminant 1, donc la famille $(a, b - c, c)$ est une base de $E$.,

dans cette base, la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, car $u(a) = a$, $u(b - c) = b - c$ et $u(c) = -b + 2c = -(b - c) + c$.

(c) Montrer que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

**Correction :** On est ici dans le cas de la question 10. donc $A$ est semblable à $A^{-1}$.

**12)** Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

**Correction :** Soit $A = -I$, alors, pour toute matrice $B$ semblable à $A$, on a $B = P^{-1}(-I)P = -I$ donc la classe de similitude de $-I$ est le singleton $\{-I\}$, il n'y a donc aucune matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à $-I$.

# Second problème

Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

**Notations :**

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $E_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n$ où $n$ est un entier naturel. On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.

Si $f$ est un élément de $E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

## Polynômes de Tchebychev

Dans cette partie $n$ désigne un entier naturel.

**1) a)** Déterminer un polynôme $T$ à coefficients réels de degré $n$ vérifiant la propriété $(*)$ :

$$(*) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}, \quad T(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

*(on pourra remarquer que* $\cos(n\theta)$ *est la partie réelle de* $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$*.)*

**Correction :** Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k\, \sin^k(\theta)\right)$$

Or $i^k$ est réel lorsque $k$ est pair et imaginaire pur sinon, ainsi

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)\, i^{2k}\, \sin^{2k}(\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)\,(1-\cos^2(\theta))^k$$

On en déduit que le polynôme $T = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}\,(1-X^2)^k$ peut convenir.

Vérifions qu'il est de degré $n$.

Pour $k \in [\![0, \lfloor n/2\rfloor]\!]$, $(-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}\,(1-X^2)^k$ est polynôme de degré $n$ de coefficient dominant $\binom{n}{2k}$.

On en déduit que $T$ est bien un polynôme de degré $n$ dont le coefficient dominant est $\sum\limits_{0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k}$, qui est bien un réel non nul.

**b)** Montrer qu'un polynôme vérifiant $(*)$ est unique.

**Correction :** Soit $P$ un polynôme de degré $n$ vérifiant : $\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Le polynôme $T-P$ est alors de degré inférieur ou égal à $n$ admettant une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Un polynôme vérifiant $(*)$ est donc unique.

On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice $n$, on le note $T_n$.

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

**2) a)** Montrer que : $\forall x \in [-1,1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$

**Correction :** Soit $x \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arccos(x)$.

On a, en utilisant $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ :

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) = 2xT_{n+1}(x)$$

**b)** Calculer $T_0$, $T_1$, $T_2$ et $T_3$.

**Correction :** Par définition de $T_n$ et d'après la question 1.b), on obtient $\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } T_2 = 2X^2 - 1}$ car $\cos 0 = 1$ et $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

D'après ce qui précède, on obtient $T_3 = C_3^0 X^3 - C_3^2 X(1-X^2)$ i.e. $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X.}$

**c)** Donner le coefficient dominant de $T_n$.

**Correction :** D'après la question 1.a, le coefficient de terme de plus haut degré (i.e. $n$) de $T$ est :

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((1+1)^n + (1-1)^n\right) = \ 2^{n-1} \text{ si } n > 0 \\ 1 \text{ pour } n = 0 \end{cases}$$

**3)** Racines et extrema

**a)** Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)) \quad \text{où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

**Correction :** Quand $k$ varie de 0 à $n-1$, les réels $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont distincts et compris entre 0 et $\pi$. Les réels $\cos\theta_k$ sont donc $n$ racines distinctes de $T_n$ car $T_n(\theta_k) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$. Or $T_n$ est un polynôme de degré $n$ et de coefficient dominant $2^{n-1}$ (question précédente). Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos\theta_k)}$$

**b)** On pose, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Calculer $\|T_n\|_\infty$, puis montrer que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$$

Les $n+1$ réels $c_0, \cdots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev

**Correction :** On a $\|T_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]} |T_n(x)| = \sup_{x\in[-1;1]} |\cos(n\arccos(x)|$ donc $\|T_n\|_\infty \leqslant 1$.

Par ailleurs $T_n(c_k) = \cos\left(n \arccos\cos\frac{k\pi}{n}\right)$. Or $k\pi/n$ est compris dans $[0;\pi]$ intervalle sur lequel $\arccos\circ\cos$ est l'identité donc $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Ainsi $\|T_n\|_\infty \geqslant 1$ et finalement

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,...,n\} \ \ \|T_n\|_\infty = 1 = |T_n(c_k)| \text{ et } T_n(c_k) = -T_n(c_{k+1}) = (-1)^k \ \ \forall k \in \{0,1,...,n-1\}}$$

**c)** Tracer le graphe de $T_3$, préciser sur le graphe les réels $c_0, c_1, c_2, c_3$.

# II Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier naturel et $f$ un élément de $E$.
On note $d_\infty(f, E_n) = \inf\{\|f-Q\|_\infty, Q \in E_n\}$.
On dit qu'un élément $P$ de $E_n$ est un polynôme de meilleur approximation (on notera en abrégé PMA) au sens de Tchebychev de $f$ d'ordre $n$, s'il vérifie une des deux conditions équivalentes :

(i) $\|f-P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$

(ii) $\forall Q \in E_n, \|f-P\|_\infty \leqslant \|f-Q\|_\infty$

**Existence d'un PMA d'ordre $n$ pour $f$**

On pose $K = \{Q \in E_n, \|f-Q\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\}$.

**4)** Montrer que $K$ est une partie compacte non vide de $E_n$.

**Correction :** L'espace vectoriel $E_n$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On considérera donc (ce que suggère l'énoncé) la topologie pour la norme $\| \ \|_\infty$ .

La partie $\boxed{K \text{ est non vide}}$ car elle contient le polynôme nul.

L'application $\psi : Q \in E_n \mapsto \|f-Q\|_\infty - \|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ satisfait pour tout $(P;Q)$ de $E^2$, l'égalité $|\psi(Q)-\psi(P)| = |\|Q-f\|_\infty - \|P-f\|_\infty|$. Or $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $E$ donc vérifie la seconde inégalité triangulaire, ainsi $|\|Q-f\|_\infty - \|P-f\|_\infty| \leqslant \|Q-P\|_\infty$. Cela prouve que $\psi$ est une application 1-lipschitzienne donc continue.

L'image réciproque par $\psi$ du fermé $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$ est $\boxed{K \text{ qui est donc un fermé de } E_n.}$

Pour tout $Q$ de $K$, l'inégalité triangulaire assure $\|Q\|_\infty \leqslant \|Q-f\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$. Cela démontre bien que $\boxed{K \text{ est une partie bornée de } E_n.}$

$E_n$ étant de dimension finie on peut donc dire que $\boxed{\text{K est un compacte de } E_n.}$

**5) a)** Montrer que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$.

**Correction :** Comme $K$ est une partie non vide de $E_n$, on obtient $d_\infty(f,K) \geqslant d_\infty(f,E_n)$.

Par définition de $d_\infty(f,E_n)$, comme le polynôme nul est dans $E_n$, on a $d_\infty(f,E_n) \leqslant \|f\|_\infty$. Deux cas se présentent donc

• $d_\infty(f,E_n) = \|f\|_\infty$ : dans ce cas, comme $d_\infty(f,K) \leqslant \|f\|_\infty$ puisque 0 est dans $K$, on obtient $d_\infty(f,K) \leqslant d_\infty(f,E_n)$.

• $d_\infty(f,E_n) < \|f\|_\infty$ : dans ce cas, par définition de $d_\infty(f,E_n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $R_\varepsilon$ de $E_n$ vérifiant $d_\infty(f,E_n) \leqslant \|R_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant d_\infty(f,E_n)+\varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon < \|f\|_\infty - d_\infty(f,E_n)$ (ce dernier réel étant bien strictement positif), le polynôme $R_\varepsilon$ vérifie $\|R_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant d_\infty(f,E_n)+\varepsilon < \|f\|_\infty$ donc est en fait dans $K$. Ainsi, il vérifie $d_\infty(f,K) \leqslant \|R_\varepsilon - f\|_\infty$ et finalement $d_\infty(f,K) \leqslant d_\infty(f,E_n)+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon$ assez petit, d'où en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 l'inégalité $d_\infty(f,K) \leqslant d_\infty(f,E_n)$.
• Dans les deux cas, on a prouvé l'inégalité $d_\infty(f,K) \leqslant d_\infty(f,E_n)$ et donc d'après l'inégalité trouvée au début de la question, on a bien montré l'égalité $\boxed{d_\infty(f,K) = d_\infty(f,E_n).}$

**b)** En déduire qu'il existe un élément $P$ de $E_n$ tel que $\|f-P\|_\infty = d_\infty(f,E_n)$.
$P$ est donc un PMA d'ordre $n$ de $f$.
**Correction :** La fonction $Q \in E_n \mapsto \|Q-f\|_\infty \in \mathbb{R}$ est continue (c'est la somme de $\psi$ (question 12.a) et de la fonction constante donc continue $\|f\|_\infty$). Sa restriction à la partie compacte $K$ (question 12.b) est donc bornée et atteint ses bornes en particulier l'inférieure. Ainsi,
$\boxed{\text{il existe } P \text{ dans } K \text{ donc dans } E_n \text{ vérifiant } \|f-P\|_\infty = d_\infty(f,K) \text{ i.e. } \|f-P\|_\infty = d_\infty(f,E_n)}$ d'après la question précédente.

**Condition suffisante pour être un PMA**

Soit $h$ un élément de $E$. On dit que $h$ équioscille sur $k+1$ points, s'il existe $k+1$ réels $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ de l'intervalle $[-1,1]$, tels que

$$\forall i \in [\![0,k]\!] \quad |h(x_i)| = \|h\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0,k-1]\!] \quad h(x_{i+1}) = -h(x_i)$$

(on dit que les extrema sont alternés).

**6)** Montrer que le polynôme $T_{n+1}$ de Tchebychev d'indice $n+1$ équioscille sur $n+2$ points.
**Correction :** C'est exactement le résultat obtenu à la question 3.b. (qui était plus précis que celui demandé par l'énoncé).

Le but de la question qui suit est de montrer le résultat suivant :
si $P$ est un élément de $E_n$ tel que $f-P$ équioscille sur $n+2$ points, alors $P$ est un PMA d'ordre $n$ de $f$.

**7)** Soit $P$ un élément de $E_n$ tel que $f-P$ équioscille sur $n+2$ points que l'on note $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$. Soit $Q$ un élément de $E_n$ tel que $\|f-Q\|_\infty < \|f-P\|_\infty$.

**a)** Soit $i \in [\![0,n+1]\!]$, montrer que si $f(x_i)-P(x_i) > 0$ alors $Q(x_i)-P(x_i) > 0$.
On a de même que, si $f(x_i)-P(x_i) < 0$ alors $Q(x_i)-P(x_i) < 0$.
**Correction :** Pour tout $x$ de $[-1;1]$, on a $Q(x)-P(x) = Q(x)-f(x)+(f(x)-P(x))$ et $|Q(x)-f(x)| \leqslant \|Q-f\|_\infty$ donc $|Q(x)-f(x)| < \|P-f\|_\infty$. Pour les réels $x_i$, on a de plus $|f(x)-P(x)| = \|P-f\|_\infty$, donc pour ces réels, le signe de $Q(x)-P(x) = Q(x)-f(x)+(f(x)-P(x))$ est bien celui de $f(x)-P(x)$.

**b)** En déduire que $P = Q$ et conclure.
**Correction :** Pour tout $i$ de $\{0,...n\}$, la fonction polynômiale $P-Q$ est continue sur $[x_i;x_{i+1}]$ et $(P-Q)(x_i)$ et $(P-Q)(x_{i+1})$ sont de signes différents (d'après la question 15.a car $f-P$ équioscille sur les $x_i$). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc et assure que $P-Q$ s'annule sur cet intervalle $[x_i;x_{i+1}]$, en fait sur $]x_i;x_{i+1}[$ car $P-Q$ ne s'annule pas aux bornes (question 7a). On a donc trouvé $Card(\{0,..n\}) = n+1$ racines au polynôme $P-Q$ qui est de degré au plus $n$ (car dans $E_n$). Ce polynôme est donc le polynôme nul i.e. $\boxed{P = Q}$.

Ce dernier résultat contredit l'hypothèse $\|Q-f\|_\infty < \|P-f\|_\infty$. un tel polynôme $Q$ n'existe donc pas, ce qui signifie que tout polynôme $R$ de $E_n$ vérifie l'inégalité $\|P-f\|_\infty \leqslant \|R-f\|_\infty$ autrement dit $\boxed{P \text{ est un P.M.A.}}$ d'après la caractérisation (ii).

**Détermination de PMA**

**8)** Dans cette question, pour $x \in [-1,1]$, on prend $f(x) = x^{n+1}$ et on pose :

$$q_n(x) = x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$$

Montrer que $q_n$ est un PMA d'ordre $n$ de $f$.
**Correction :** Le polynôme $q_n = X^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}$ est de degré au plus $n+1$ car $X^{n+1}$ et $T_{n+1}$ sont de degré $n+1$. Le coefficient du terme de degré $n+1$ est $1 - 2^{-n} \times 2^{n+1-1}$ d'après la question 2.c, autrement dit nul. Ainsi $q_n$ est bien de degré au plus $n$ et donc dans $E_n$.
De plus, $f - q_n = 2^{-n}T_{n+1}$ équioscille sur $n+2$ points d'après la question 6.b (le fait de multiplier par une constante non nulle ne change rien au caractère équioscillant), donc la question 7.b assure que $\boxed{q_n \text{ est un P.M.A. d'ordre } n \text{ de } f}$.

**9)** En déduire que pour tout polynôme $P$ unitaire de degré $n+1$, on a $2^{-n}\,\|T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$.

**Correction :** Soit $P$ un polynôme unitaire de degré $n+1$. Alors il existe un polynôme $Q$ de $E_n$ tel que $P = X^{n+1} - Q$. D'après la question 16, on a $\|f - q_n\|_\infty \leqslant \|f - Q\|_\infty$ avec $f : x \mapsto x^{n+1}$. Ainsi, on a par définition de $q_n$, l'inégalité $\|2^{-n}\,T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$ soit encore $\boxed{2^{-n}\,\|T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty.}$

**10)** **a)** Dans cette question $f$ est un polynôme de degré $n+1$.
Déterminer un PMA d'ordre $n$ de $f$.

**Correction :** Soit $f$ une fonction polynômiale de degré $n+1$ et de coefficient dominant $a$ (donc $a \neq 0$). D'après la caractérisation (i) du P.M.A., on cherche $Q$ dans $E_n$ tel que $\|f - Q\|_\infty$ c'est à dire $|a|\,\|a^{-1}\,f - a^{-1}Q\|_\infty$ est minimum. Or le polynôme $a^{-1}f$ est de degré $n+1$ et unitaire, et quand $Q$ décrit $E_n$, les polynômes $a^{-1}\,f - a^{-1}Q$ décrivent entièrement l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n+1$. Ainsi d'après la question 17, $\|a^{-1}\,f - a^{-1}Q\|_\infty$ est minimum (quand $Q$ décrit $E_n$) pour $a^{-1}\,f - a^{-1}Q = 2^{-n}\,T_{n+1}$.

Finalement, $\boxed{\text{un P.M.A. de } f \text{ est donc } f - 2^{-n}aT_{n+1}}$ (qui est bien un élément de $E_n$).

**b)** Application : déterminer un PMA d'ordre 2 de $f : x \mapsto 5x^3 + 2x - 3$.

**Correction :** La fonction polynômiale $x \mapsto 5x^3 + 2x - 3$ est de degré $3 = 2+1$, donc admet un P.M.A. d'ordre 2 qui est $Q = 5x^3 + 2x - 3 - 2^{-2} \times 5T_3(x)$ d'après 18.a. D'après la question 2.b, on a $Q = 5x^3 + 2x - 3 - 5x^3 - \frac{3}{4}x = \boxed{\frac{5}{4}x - 3}$.