

Devoir surveillé n°2

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 19 octobre 2023

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence !!
Le sujet comporte deux problèmes indépendants.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.



Premier problème

Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Partie A

1) On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B .

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2) Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3) Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.

On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

(a) Montrer que $\text{Im } w \subset \ker u^i$.

(b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

4) Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2$.

(a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.)

(b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5) Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = 1$.

(a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

6) Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

7) Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

8) On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9) On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une matrice semblable à la matrice M .

(b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rg}(M)$.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10) On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.

Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11) **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12) Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une

matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Second problème

Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

Notations :

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel. On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.

Si f est un élément de E , on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

Polynômes de Tchebychev

Dans cette partie n désigne un entier naturel.

1) a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété (*) :

$$(*) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

(on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.)

b) Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique.

On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n , on le note T_n .

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1, 1]$ par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

2) a) Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$

b) Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3 .

c) Donner le coefficient dominant de T_n .

3) Racines et extrema

a) Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)) \quad \text{où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

b) On pose, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Calculer $\|T_n\|_\infty$, puis montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$$

Les $n+1$ réels $c_0, \dots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev

c) Tracer le graphe de T_3 , préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3 .

II Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel et f un élément de E .

On note $d_\infty(f, E_n) = \inf \{\|f - Q\|_\infty, Q \in E_n\}$.

On dit qu'un élément P de E_n est un polynôme de meilleure approximation (on notera en abrégé PMA) au sens de Tchebychev de f d'ordre n , s'il vérifie une des deux conditions équivalentes :

(i) $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$

(ii) $\forall Q \in E_n, \|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$

Existence d'un PMA d'ordre n pour f

On pose $K = \{Q \in E_n, \|f - Q\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$.

4) Montrer que K est une partie compacte non vide de E_n .

5) a) Montrer que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$.

b) En déduire qu'il existe un élément P de E_n tel que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$.

P est donc un PMA d'ordre n de f .

Condition suffisante pour être un PMA

Soit h un élément de E . On dit que h équi oscille sur $k + 1$ points, s'il existe $k + 1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ de l'intervalle $[-1, 1]$, tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad |h(x_i)| = \|h\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket \quad h(x_{i+1}) = -h(x_i)$$

(on dit que les extrema sont alternés).

6) Montrer que le polynôme T_{n+1} de Tchebychev d'indice $n + 1$ équi oscille sur $n + 2$ points.

Le but de la question qui suit est de montrer le résultat suivant :

si P est un élément de E_n tel que $f - P$ équi oscille sur $n + 2$ points, alors P est un PMA d'ordre n de f .

7) Soit P un élément de E_n tel que $f - P$ équi oscille sur $n + 2$ points que l'on note $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$. Soit Q un élément de E_n tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.

a) Soit $i \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, montrer que si $f(x_i) - P(x_i) > 0$ alors $Q(x_i) - P(x_i) > 0$.

On a de même que, si $f(x_i) - P(x_i) < 0$ alors $Q(x_i) - P(x_i) < 0$.

b) En déduire que $P = Q$ et conclure.

Détermination de PMA

8) Dans cette question, pour $x \in [-1, 1]$, on prend $f(x) = x^{n+1}$ et on pose :

$$q_n(x) = x^{n+1} - 2^{-n} T_{n+1}(x)$$

Montrer que q_n est un PMA d'ordre n de f .

9) En déduire que pour tout polynôme P unitaire de degré $n + 1$, on a $2^{-n} \|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$.

10) a) Dans cette question f est un polynôme de degré $n + 1$.

Déterminer un PMA d'ordre n de f .

b) Application : déterminer un PMA d'ordre 2 de $f : x \mapsto 5x^3 + 2x - 3$.