Correction : Devoir surveillé n°2

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 17 octobre 2024

Exercice : Calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

1) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Correction : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.
 f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit u et v les fonctions définies par $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = 1 - \cos(t)$.

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} = 0$, et $\frac{1 - \cos(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$.

D'après le théorème d'intégration par parties les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont de même nature.

Pour t au voisinage de $+\infty$, $0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$ est convergente donc $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

De plus $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ (par développement limité), donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ est convergente et par suite $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ aussi.

2) Pour tout entier naturel non nul n , on définit J_n par :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

Calculer J_n .

Correction : Soit n un entier non nul, strictement supérieur à 1, et $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t) = 2 \sin(t) \cos(2nt) \quad \text{d'où} \quad J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(2nt) dt = 0$$

On en déduit que pour tout n , $J_n = J_1 = \frac{\pi}{2}$.

3) **Lemme de Lebesgue**

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$, où a et b sont des réels tels que $a < b$.

On pose, pour tout entier naturel n , $L_n = \int_a^b g(t) \sin(nt) dt$.

Montrer que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Correction : Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. La fonction $t \mapsto -\frac{1}{n} \cos(nt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On effectue une intégration par parties de l'intégrale $\int_a^b g(t) \sin(nt) dt$. On a alors

$$L_n = \int_a^b g(t) \sin(nt) dt = \left[-g(t) \frac{1}{n} \cos(nt) \right]_a^b + \int_a^b g'(t) \frac{1}{n} \cos(nt) dt$$

La fonction $t \mapsto g'(t) \cos(nt)$ étant continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée. On en déduit que :

$$|L_n| \leq \frac{1}{n} (|g(b)| + |g(a)| + (b-a) \|g'\|_\infty)$$

On en déduit que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

4) On définit la fonction φ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, par

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Correction : la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme composée de fonctions qui le sont.

Au voisinage de 0 on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{6}x + o(x)$$

On en déduit que φ est continue et dérivable en 0.

On a de plus, pour x non nul : $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2 \cos(x) - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$.

Au voisinage de 0 :

$$\varphi'(x) = \frac{x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))^2}{x^2(x + o(x^2))^2} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

. On en déduit que la dérivée est bien continue en 0.

Conclusion : φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5) On pose, pour tout entier n non nul :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$$

Exprimer I en fonction de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Correction : Pour n non nul on a, par changement de variable affine $u = (2n+1)t$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du$$

On en déduit que $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

6) Calculer I .

Correction : La fonction φ définie à la question 4) étant de classe $\mathcal{C}^1$, d'après la question 3), on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin(nt) dt = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$. Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = I_n - J_n$. On en déduit, à l'aide de la question 2), et de la question précédente, que $I = \frac{\pi}{2}$.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ sa base canonique et I_n sa matrice unité.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

Pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A . Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de φ_A , les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

- 1) Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker(\varphi_A)$.

Correction : Par bilinéarité du produit matricielle l'application φ_A est linéaire.

Comme I_2 et A commutent avec A , ce sont des éléments de $\ker(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 2) Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction : par calcul directe, en faisant attention à l'ordre des vecteurs de la base, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

- 3) Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée.

Correction : on utilise la matrice calculée à la question précédente : pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{\varphi_A}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & c & -b \\ 0 & \lambda & -c & b \\ b & -b & \lambda - a + d & 0 \\ -c & c & 0 & \lambda - d + a \end{vmatrix} \stackrel{C_1 + C_2 \rightarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & c & -b \\ \lambda & \lambda & -c & b \\ 0 & -b & \lambda - a + d & 0 \\ 0 & c & 0 & \lambda - d + a \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 - L_1 \rightarrow L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & c & -b \\ 0 & \lambda & -2c & 2b \\ 0 & -b & \lambda - a + d & 0 \\ 0 & c & 0 & \lambda - d + a \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -2c & 2b \\ -b & \lambda - a + d & 0 \\ c & 0 & \lambda - d + a \end{vmatrix}$$

En développant, par exemple suivant la dernière ligne :

$$\chi_{\varphi_A}(\lambda) = \lambda(-c2b(\lambda - a + d) + (\lambda - d + a)(\lambda(\lambda - a + d) - 2cb)) = \lambda^2(\lambda^2 - ((a - d)^2 + 4bc))$$

- 4) En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

Correction : par hypothèse A et I_2 ne sont pas liées et on a vu à la question 1) que c'étaient des éléments du noyau de φ_A . On en déduit que 0 est une valeur propre d'ordre au moins 2.

Si $(d - a)^2 + 4bc > 0$, φ_A admet alors deux autres valeurs propres distinctes non nulles (de multiplicité 1), il est donc diagonalisable.

Si $(d - a)^2 + 4bc = 0$ alors 0 est la seule valeur propre et donc φ ne peut être diagonalisable que si c'est l'endomorphisme nulle, ce qui n'est pas le cas.

Si $(d - a)^2 + 4bc < 0$ alors χ_{φ_A} n'est pas scindé (dans $\mathbb{R}$) donc φ_A n'est pas diagonalisable.

Conclusion : φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

5) Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Correction : par hypothèse A n'est pas proportionnelle à I_2 , on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si A admet deux valeurs propres distinctes, c'est à dire si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racine simple, c'est à dire si et seulement si le discriminant de son polynôme caractéristique est strictement positif.

Or on a $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$. Donc A est diagonalisable si et seulement si $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$, ce qui est équivalent à $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

A l'aide de la question précédente on conclut donc que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6) On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i . On note alors P la matrice de passage

de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

a) Exprimer, pour tout couple (i, j) , la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j .

Correction : on a par calcul direct : $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ (une multiplication à gauche par D multiplie les lignes, à droites les colonnes, on peut aussi le justifier en utilisant l'écriture de D dans la base canonique ($E_{i,j}$) avec $E_{k,l}E_{i,j} = \delta_{l,i}E_{k,j}$...)

b) Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A .

Correction : pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a, à l'aide de la question précédente,

$$\varphi_A(B_{i,j}) = AB_{i,j} - B_{i,j}A = PDP^{-1}PE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}P^{-1}PDP^{-1} = P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$$

Comme P est inversible et $E_{i,j}$ est non nul, on en déduit que $B_{i,j}$ est non nul. C'est donc bien un vecteur propre de φ_A .

c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

Correction : l'application qui à M associe PMP^{-1} est clairement un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que la famille $(B_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit, d'après la question précédente, que c'est une base de vecteurs propres de φ_A qui est donc diagonalisable.

7) On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

Correction : φ étant initialement un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ses valeurs propres sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A , alors z est aussi une valeur propre de $A^\top$.

Correction : par propriété A et $A^\top$ ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres. (Cela se démontre par la propriété du déterminant sur la transposée d'une matrice).

- iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A . On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et $A^T Y = \bar{z}Y$.
En calculant $\varphi_A(XY^T)$, démontrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .

Correction : on a

$$\varphi_A(XY^T) = AXY^T - XY^T A = \lambda XY^T - X(A^T Y)^T = \lambda XY^T - X(\bar{z}Y)^T = (z - \bar{z})XY^T$$

Montrons que XY^T est non nul pour pouvoir dire que c'est un vecteur propre et donc que $(z - \bar{z})$ est une valeur propre de φ_A . Comme, par hypothèse, X et Y sont non nuls, il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$. Or les coefficients de XY^T sont les $x_i y_j$, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on en déduit que XY^T est non nul. D'où le résultat.

- b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

Correction : A étant un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle admet au moins une valeur propre z complexe. Or, comme A est une matrice réelle, si z n'est pas réelle alors $\bar{z}$ est aussi une valeur propre de A . D'après la question 7ai) les valeurs propres de φ_A sont réelles. Avec les notations de la question précédente on en déduit que $z - \bar{z}$ est réel. Or, pour tout complexe z , $z - \bar{z}$ est imaginaire pur, on en déduit que $z - \bar{z} = 0$ et par suite que z est réel.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

- c) Démontrer que, pour tout couple (i, j) , il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

Correction : par définition on a $\varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$, c'est à dire $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$. On en déduit que

$$AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$$

On obtient donc $\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}$.

- d) En déduire que A est diagonalisable.

Correction : Par hypothèse la famille $(P_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (base de vecteurs propres de φ_A). X étant fixé et non nul on peut construire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont X est le premier vecteur. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est entièrement déterminé par l'image d'une base par cet endomorphisme. Par isomorphisme on peut donc dire qu'une matrice M (de l'endomorphisme) est entièrement déterminée par l'image (produit par M) des vecteurs d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on peut donc trouver une matrice M telle que $MX = Y$. On en déduit que la famille $(P_{i,j}X)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut alors en extraire une base qui sera alors, d'après la question précédente, une base de vecteurs propres de A . A est alors diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A .

- 8) Démontrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

Correction : C'est une question de cours !

Commençons par montrer que c'est une famille libre. Soit $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket} \in \mathbb{R}^m$ telle que $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i = 0$.

On multiplie cette égalité par A^{m-1} . Comme $A^m = 0$ on obtient $\alpha_0 A^{m-1} = 0$. Or par hypothèse m est le degré du polynôme minimal donc $A^{m-1} \neq 0$. On en déduit que $\alpha_0 = 0$. On réitère en multipliant successivement par A^{m-i} pour i allant de 2 à m pour obtenir $\alpha_{i-1} = 0$. La famille est donc libre.

Montrons qu'elle est génératrice.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, d'après la division euclidienne de P par π_A , il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel $P = Q\pi_A + R$, avec $\deg(R) < m$. On obtient alors $P(A) = R(A)$ et donc $P(A)$ est une combinaison linéaire de la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$.

Conclusion : la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est donc une base de $\mathbb{R}[A]$.

- 9) Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \varphi_A$.

Correction : tout polynôme en A commute avec A , donc pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ est un élément du noyau de φ_A . On en déduit que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans le noyau de φ_A .

Par propriété sur la dimension, comme $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker(\varphi_A)$, on a $\dim(\mathbb{R}[A]) \leq \dim(\ker(\varphi_A))$, d'où $m \leq \dim(\ker(\varphi_A))$.

10) *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Correction : soit $(a_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$. En composant cette égalité successivement par u^{n-k} pour k allant de 1 à n , obtient successivement $a_{n-k+1} e_{n-k+1} = a_{n-k+1} u^{n-1}(y) = 0$, d'où $a_{n-k+1} = 0$. La famille est alors une famille libre de n vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soient $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$.

Correction : on va montrer que $v(e) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(e)$ pour tout vecteur e de la base précédente.

Soit $j \in [1, n]$ on a, comme v est un élément du noyau de φ_A et donc commute avec u :

$$v(e_j) = v(u^{n-j}(y)) = u^{n-j}(v(y)) = u^{n-j} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = u^{n-j} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(u^{n-j}(y)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(e_j)$$

d'où le résultat.

c) En déduire $\ker(\varphi_A)$.

Correction : d'après la question précédente et la question 9) on a directement que $\ker(\varphi_A) = \mathbb{R}[A]$.

11) *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k . On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B . Démontrer que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v .

Correction : par propriété si deux endomorphismes commutent alors les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Or B est un élément du noyau de φ_A si et seulement si il commute avec A . C'est à dire si et seulement si v commute avec u . On en déduit que si B est un élément du noyau alors pour tout $i \in [1, p]$ $E_u(\lambda_i)$ est stable par v .

Réciproquement : on suppose que tout sous espace propre de u est stable par v .

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $(x_k)_{k \in [1, p]}$ une famille de vecteurs propres de u telle que $x = \sum_{k=1}^p x_k$. On a alors

$$v \circ u(x) = v \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k v(u_k)$$

or, comme $E_u(\lambda_k)$ est stable par v , on a alors, pour tout k , $u(v(x_k)) = \lambda_k v(x_k)$. On en déduit que $v \circ u(x) = u \circ v(x)$. Donc u et v commutent.

b) En déduire que $B \in \ker(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice de v , dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u , a une forme que l'on précisera.

Correction : par propriété sur une somme directe de sous espaces stables, B est un élément de $\ker(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice dans une base adaptée à la somme directe est alors diagonale par blocs, où chaque bloc est la matrice de l'endomorphisme induit par v sur le sous espace propre, c'est donc une matrice d'ordre m_k

c) Préciser la dimension de $\ker(\varphi_A)$.

Correction : Un élément de $\ker(\varphi_A)$ est entièrement défini par les blocs décrits dans la question précédente, on en déduit la dimension de $\ker(\varphi_A)$ qui est alors $\sum_{k=1}^p m_k^2$

d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k .

Partie IV. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B .

12) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

Correction : montrons par récurrence sur k , que pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

Pour $k = 0$, $B^0 = I_n$ et donc, d'après la première question $\varphi_A(I_n) = 0 = 0\alpha B^0$. Pour $k = 1$, cela vient de la définition de B : vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre α .

Soit $k \in \mathbb{N}$ on suppose que $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$. On a alors

$$\varphi_A(B^{k+1}) = AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^k B - B^k AB + B^k AB - B^{k+1}A = \varphi_A(B^k)B + B^k \varphi_A(B)$$

On a alors par hypothèse de récurrence et définition de B , $\varphi_A(B^{k+1}) = \alpha(k+1)B^{k+1}$.

Le théorème de récurrence s'applique et le résultat est vrai pour tout entier k .

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α , B et $P'(B)$.

Correction : soit $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in [1, m]} \in \mathbb{R}^m$ tels que $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$. On a alors par linéarité de φ_A , et d'après la question précédente

$$\varphi_A(P(B)) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_A(B^i) = \sum_{i=0}^m a_i i \alpha B^i = \sum_{i=1}^m a_i i \alpha B^i = \alpha B \sum_{i=1}^m a_i i B^{i-1}$$

Or $P = \sum_{i=1}^m a_i i B^{i-1}$, donc $\varphi_A(P(B)) = \alpha B P'(B)$.

14) Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul.

Correction : en considérant $P = \pi_B$ dans la question précédente, on obtient que $X\pi'_B$ est aussi un polynôme annulateur de B . Il est donc un multiple de π_B . Or $X\pi'_B$ est de même degré que π_B il lui est donc associé. Or le coefficient dominant de $X\pi'_B$ est d et π_B est unitaire. On en déduit que $X\pi'_B = d\pi_B$ et donc $X\pi'_B - d\pi_B = 0$.

15) En déduire que $B^d = 0$.

Correction : d'après la question précédente, $X\pi'_B = d\pi_B$. On en déduit que si λ est une racine non nulle de π_B d'ordre k alors elle est aussi racine d'ordre k de π'_B , ce qui est absurde. On en déduit que la seule racine de π_B est 0 et donc $\pi_B = X^d$ et par suite $B^d = 0$.