Devoir surveillé n°2

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 17 octobre 2024

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence ! !

Le sujet comporte un exercice d'analyse et un problème d'algèbre. Vous devez traitez les deux.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Exercice : Calcul de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on définit J_n par :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Calculer J_n.

3) Lemme de Lebesgue

Soit g une une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, où a et b sont des réels tels que $a < b$.

On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \displaystyle\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

4) On définit la fonction φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{sin(x)} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 0$$

Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5) On pose, pour tout entier n non nul :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exprimer I en fonction de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6) Calculer I.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sa base canonique et I_n sa matrice unité.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de φ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1) Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3) Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée.

4) En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5) Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6) On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose :

$$B_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$$

a) Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b) Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A.

c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

7) On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(P_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \overline{z}Y$. En calculant $\varphi_A\left(X\,{}^tY\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c) Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8) Démontrer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

9) Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker\varphi_A$ et en déduire une minoration de $\dim\ker\varphi_A$.

10) *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soient $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c) En déduire $\ker(\varphi_A)$.

11) *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker\varphi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v.

b) En déduire que $B \in \ker(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c) Préciser la dimension de $\ker(\varphi_A)$.

d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k.

Partie IV. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

14) Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul.

15) En déduire que $B^d = 0$.