Correction : Devoir surveillé n°2

MP Clemenceau 2022-23

Jeudi 29 septembre 2022

Problème d'algèbre

Soit E un K espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E. On désigne par $\ker(u)$ le noyau de u et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.
Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \cdots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E.

PREMIERE PARTIE

A - Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le rang de u et donner une base de $\mathrm{Im}(u)$, une base de $\ker u$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
Correction : le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, on a donc :

$$\mathrm{rg}(M) \underset{C_1 - C_2 \to C_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \underset{C_3 + C_4 \to C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

Autre rédaction : Les colonnes C_1 et C_2 sont égales, les colonnes C_3 et C_4 sont opposées, et C_1 et C_3 sont clairement non colinéaires, donc le rang de M est 2.
L'image d'un endomorphisme est engendré par l'image des vecteurs d'une base.
On a donc $\mathrm{Im}(u) = vect\{e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$. Donc une base de $\mathrm{Im}(u)$ est $(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$.
D'après le théorème du rang, comme $\mathrm{rg}(u) = 2$, le noyau de u est un sous espace vectoriel de E de dimension 2. D'après les calculs pour obtenir le rang on a $u(e_1 - e_2) = 0$ et $u(e_3 + e_4) = 0$. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_3 + e_4$ sont clairement non colinéaires, on en déduit qu'une base de $\ker(u)$ est $(e_1 - e_2, e_3 + e_4)$.

2) Calculer M^2, M^3 et montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que : $M^p = \alpha_p A$.

Expliciter alors M^p.
Correction : On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $M^2 = -2A$ et $M^3 = 4A$. On remarque que $A^2 = -2A$ et on a alors, par récurrence, que, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $M^p = (-2)^{p-1} A$.

3)

(a) Donner une base, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\mathrm{Im}(u^2), \quad \ker(u^2), \quad \mathrm{Im}(u^3), \quad \ker(u^3).$$

Correction : à l'aide des matrices trouvées à la question précédente on obtient :

$$\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u^3) = Vect(e_3 - e_4) \qquad \text{et} \qquad \ker(u^2) = \ker(u^3) = Vect(e_1, e_2, e_3 + e_4)$$

(b) Déterminer : $\forall k \geqslant 2$, $\ker(u^k)$, $\mathrm{Im}(u^k)$.
Correction : Soit $k \geqslant 2$. Comme les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de u^k sont proportionnelles à celle de u^2 on a directement que $\mathrm{Im}(u^k) = Vect(e_3 - e_4)$ et $\ker(u^k) = Vect(e_1, e_2, e_3 + e_4)$

(c) Montrer que $E = \ker(u^2) \oplus \mathrm{Im}(u^2)$.
Correction : on montrer que la famille $(e_1, e2, e_3 + e_4, e_3 - e_4)$ est libre donc une base de E, pour en déduire le résultat.

B - Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

4) d est-il injectif ? d est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie ?
Correction : d n'est pas injective car deux polynômes différents d'une constante ont même dérivée. On peut dire aussi que le noyau de cette application est $\mathbb{R}_0[X]$ qui n'est pas réduit à 0.
d est surjective car tout polynôme admet une primitive dans $\mathbb{K}[x]$.
Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injectif si et seulement si il est surjectif si et seulement si il est bijectif. Comme d est surjective mais non injective, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

5) Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\ker(d^q)$.
Correction : par récurrence (par exemple) on a $\ker(d^p) = \mathbb{K}_{p-1}[X]$. On peut aussi le justifier en raisonnant sur le degré.

DEUXIEME PARTIE

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $K_p = \ker(u^p)$.

6) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
Correction : Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{p+1})$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x)$. Pour un tel x on a alors $u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$, donc y est un élément de $\mathrm{Im}(u^p)$.
Conclusion : $I_{p+1} \subset I_p$.
Soit $x \in \ker(u^p)$, on a $u^{p+1}(x) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$, donc x est élément de $\ker(u^p)$.
Conclusion : $K_p \subset K_{p+1}$.

7) On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_p$ et K_p.
Correction : en dimension finie tout endomorphisme injectif est bijectif. La composée d'applications bijectives est bijective, donc, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = E$ et $K_p = \{0\}$.

8) On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

(a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.
Correction : Pour $p \in \mathbb{N}$ l'inclusion $K_p \subset K_{p+1}$ implique que $\dim(K_p) \leqslant \dim(K_{p+1})$. La suite $(\dim(K_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite d'entiers croissante et majorée par $\dim(E)$, elle est donc constante à partir d'un certain rang. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}/K_k = K_{k+1}\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément r. La suite $(\dim(K_k))_{k\in[\![1,r]\!]}$ est alors strictement croissante. On obtient alors par récurrence que $\dim(K_r) \geqslant r - 1 + \dim(K_1)$. Par hypothèse $\dim(K_1) \geqslant 1$, donc $\dim(K_r) \geqslant r$. Or $\dim(K_r) \leqslant \dim(E)$ d'où $r \leqslant n$. On a donc $K_r \subset K_{r+1}$ et $\dim(K_r) = \dim(K_{r+1})$, donc $K_r = K_{r+1}$.

(b) Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.
Correction : On a, d'après la question **6)** que $I_{r+1} \subset I_r$, de plus, d'après le théorème du rang et ce qui précède :

$$\dim(\mathrm{Im}(u^r)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^r)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^{r+1})) = \dim(\mathrm{Im}(u^{r+1}))$$

On en déduit que $I_r = I_{r+1}$.
Soit $p \geqslant r$, supposons que $I_p = I_{p+1}$. On a toujours, d'après la question **6)** que $I_{p+2} \subset I_{p+1}$. Soit $y \in I_{p+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x) = u(u^p(x))$. Par hypothèse $I_p = I_{p+1}$ donc il existe $x' \in E$ tel que $u^p(x) = u^{p+1}(x')$. On a alors $y = u^{p+2}(x')$. On en déduit que $I_{p+1} \subset I_{p+2}$ et par suite $I_{p+1} = I_{p+2}$.

On vient donc de montrer par récurrence que pour tout $p \geqslant r$, $I_p = I_{p+1}$, et par suite que pour tout $p \geqslant 0$, $I_{r+p} = I_r$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, l'inclusion $K_r \subset K_{r+p}$ et le théorème du rang ($\dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r)$), permet d'avoir l'égalité $K_r = K_{r+p}$.

(c) Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

Correction : soit $x \in K_r \cap I_r$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u^r(y)$. On a aussi $u^r(x) = 0$, d'où $u^{2r}(y) = 0$, donc y est un élément de K_{2r}. Or d'après la question précédente $K_{2r} = K_r$, donc $u^r(y) = 0$ et par suite $x = 0$.

D'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r)$, on en déduit que $E = K_r \oplus I_r$.

9) Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Correction : si on reprend l'exemple de la dérivation d, on a pour tout r $K_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$ et donc $K_r \neq K_{r+1}$.

Problème

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x| < \frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x.

Objectifs.

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $\mathrm{e}^{-1}\, n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = \mathrm{e}^{-1}\, n! - \beta_n$.
Dans la partie **I** on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie **II** on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n. La partie **III** est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \delta_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|\delta_n|}{n}$.

I) Les suites α et β.

On définit la suite α par $\alpha_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$$

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$;

en particulier, pour $x=-1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\beta_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ et $\rho_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

I.1. Etude de la suite α.

I.1.1 Expliciter α_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.
Correction : On a $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 9$

I.1.2 Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.
Correction : On procède par récurrence sur n pour montrer que, $\forall n \geq 2,\ \alpha_n \in \mathbb{N}^*$.

- $\alpha_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est donc vrai au rang 2.
- Soit $n \geq 2$ tel que $\alpha_n \in \mathbb{N}$. On a $\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z}$. De plus $\alpha_n \geq 1$ donc $\alpha_{n+1} \geq n+1-1 \geq n \geq 2$ et donc $\alpha_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Comme $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{N}$, on a donc prouvé que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \in \mathbb{N}$.

I.2. Etude de la suite β.

I.2.1 Expliciter β_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.
Correction : On a $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 9$.

I.2.2 Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.
Correction : On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \big((-1)^k n(n-1)\dots(k+1)\big)$$

et β est un entier relatif comme somme de tels entiers.

I.2.3 Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.
Correction : On a

$$\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = (-1)^{n+1}$$

I.2.4 Comparer les deux suites α et β.
Correction : $\beta_0 = \alpha_0 = 1$ et les suites α et β vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \beta_n$.

I.3. Etude de ρ_n.

I.3.1 Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

Correction : La suite de terme général $z_k = \frac{(-1)^k}{k!}$ vérifie les hypothèses du critère de convergence des séries alternées (signe alterné, décroissance en module et convergence vers 0). La série correspondante a donc un reste d'ordre n, ρ_n, du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc $\rho(n)$ qui est positif si n est impair et négatif si n est pair.

I.3.2 Etablir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

L'inégalité est-elle stricte ?

Correction : Par propriété sur les séries alternées convergentes on a que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\rho_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

c'est à dire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

L'inégalité est stricte car $\frac{1}{k!}$ est strictement décroissante et donc on a une inégalité stricte dans le résultat sur les restes des séries alternées convergentes.

I.3.3 Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $\mathrm{e}^{-1}\, n!$.

Correction : On a $\frac{\beta_n}{n!} + \rho_n = e^{-1}$ et donc

$$\forall n \geq 1,\ |\beta_n - n!e^{-1}| = |-n!\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

D'après le dernier rappel du préambule, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

I.4. Etude d'une fonction.

On désigne par f la fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ (au moins) sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0) = 1 \ \text{ et, } \ \forall x \in]-1,1[,\ (1-x)f'(x) - xf(x) = 0$$

I.4.1 Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f. Expliciter $f(x)$ pour tout x de $]-1,1[$.

Correction : Sur $]-1,1[$, on a $f(0) = 1,\ f'(x) - \dfrac{x}{1-x}f(x) = 0$.

Comme $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est continue sur $]-1,1[$, le théorème de Cauchy cas linéaire s'applique et f existe et est unique (on a ici un problème de Cauchy).

En écrivant que $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$, on obtient que $x \mapsto -x - \ln(1-x)$ est une primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \frac{x}{1-x}$. Il existe alors une constante c telle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = c\exp\left(-x - \ln(1-x)\right) = \frac{ce^{-x}}{1-x}$$

Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $c = 1$ et donc que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

I.4.2 Justifier l'affirmation : « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ ».

Correction : L'expression précédente montre, par théorèmes généraux, que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : on peut aussi montrer par récurrence sur n que $f \in \mathscr{C}^n(]-1,1[)$ est vraie pour tout n en utilisant seulement l'équation différentielle.

I.4.3 Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n : $(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Correction : On a, d'après la question précédente, $\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)f(x) = e^{-x}$.

On pose $h(x) = (1-x)$. En dérivant $n+1$ fois cette relation par formule de Leibniz on obtient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} h^{(k)}(x) f^{(n+1-k)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

$h^{(k)}(x)$ étant nul pour $k \geq 2$, ceci devient

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

I.4.4 En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.
Correction : Appliquons la relation trouvée à la question précédente en $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = (n+1)f^{(n)}(0) + (-1)^{n+1}$$

Les suites (β_n) et $(f^{(n)}(0))$ ont même premier terme et vérifient le même relation de récurrence d'ordre 1 : elles sont égales et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = f^{(n)}(0)$$

II La suite γ.

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel.
Pour $n \geqslant 1$, on note :
- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est à dire l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.
- γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathcal{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$ on adopte la convention : $\gamma_0 = 1$.

II.1. Calculer γ_1 et γ_2.
Correction : $\mathcal{S}_1$ possède un unique élément (l'identité) et $\gamma_1 = 0$.
Dans $\mathcal{S}_2$, il y a l'identité et la transposition $< 1, 2 >$. On donc $\gamma_2 = 1$.

II.2. Classer les éléments de $\mathcal{S}_3$ selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3.
Correction : L'identité de $[|1, 3|]$ a trois points fixes.
Les transpositions $< 1, 2 >$, $< 1, 3 >$ et $< 2, 3 >$ ont un point fixe.
Les cycles $< 1, 2, 3 >$, $< 1, 3, 2 >$ n'ont pas de point fixe et on a donc $\gamma_3 = 2$.

II.3. On suppose dans cette question que $n = 4$.

II.3.1 Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant deux points fixes ?
Correction : τ a deux points fixes si et seulement deux éléments sont permutés et deux autres laissés fixes c'est à dire si et seulement si τ est une transposition. Il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ telles permutations.

II.3.2 Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant un point fixe ?
Correction : τ possède un unique point fixe a si et seulement si τ permute circulairement les éléments de $[|1, 4|] \setminus \{a\}$ (deux choix possibles). Comme on a quatre choix pour a, il y a $8 = 2 * 4$ telles permutations.

II.3.3 Calculer γ_4.
Correction : Si un élément possède trois points fixes, il en a quatre et c'est l'identité. Il y a 24 éléments dans $\mathcal{S}_4$. On a donc

$$\gamma_4 = 24 - 6 - 8 - 1 = 9$$

II.4. Relation entre les γ_k

II.4.1 Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$.
Correction : On a $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$.

II.4.2 Si k est un entier dans $[\![0, n]\!]$, combien d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ont exactement k points fixes ?
Correction : Une permutation possédant exactement k points fixes est caractérisée par le choix de ces points fixes (k parmi n) et une permutation sans points fixes des $n - k$ restant (γ_{n-k} choix). Ainsi, il y a $\binom{n}{k}\gamma_{n-k}$ permutations ayant k points fixes.

II.4.3 Etablir pour tout entier naturel n la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\gamma_k = n!$.
Correction : $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe des ensembles $T_{n,k}$ des élements de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes. En passant au cardinal, on a donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\gamma_{n-k}$$

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a donc (avec un changement d'indice $j = n - k$)

$$n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\gamma_j$$

II.5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!}x^n$ et l'on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!}x^n$ lorsque la série converge.

II.5.1 Montrer que la série converge pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$.

Correction : On a bien sûr $\gamma_n \leq n!$ (il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations) et donc $0 \leq \dfrac{\gamma_n}{n!}|x|^n \leq |x|^n$. Or, pour $|x| < 1$ la série $\sum x^n$ est absolument convergente donc la série $\sum \dfrac{\gamma_n}{n!}x^n$ est absolument convergente.

II.5.2 Pour tout x de $]-1,1[$, on pose $h(x) = \mathrm{e}^x\, g(x)$.

Ecrire, pour $x \in \left]-1, 1\right[$ et en justifiant son existence, $h(x)$ sous forme d'une série de la forme $\sum c_n x^n$, où c_n ne dépend pas de x.

Correction : Pour $x \in \left]-1, 1\right[$ on a que g est définie par une série absolument convergente, exp est définie par une série absolument convergente. h est donc définie par une série absolument convergente et son développement s'obtient par le produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{j=0}^{n} \frac{\gamma_j}{j!(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\gamma_j = 1$$

II.5.3 Expliciter $g(x)$ pour tout nombre réel x de $]-1,1[$.

On déduit de la question précédente que pour tout $x \in]-1,1[,\ h(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et donc pour tout $x \in]-1,1[,\ g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} = f(x)$.

II.5.4 Comparer les deux suites β et γ.

C'est une question à admettre car l'ensemble des connaissances actuelles n'est pas suffisant : $\alpha = \beta$

II.5.5 La fonction g est-elle définie en 1 ?

Correction : $\beta_n/n! \to e^{-1}$ est le terme général d'une série divergente. g n'est donc pas définie en 1.

II.5.6 La fonction g est-elle définie en -1 ?

Correction : De la même façon, g n'est pas définie en -1 (série grossièrement divergente).

III Sur $\delta_n = \mathrm{e}^{-1}\, n! - \beta_n$.

Pour tout entier naturel n, on note : $\delta_n = \mathrm{e}^{-1}\, n! - \beta_n, \quad J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x, \quad v_n = (-1)^{n+1} J_n$

III.1. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$

III.1.1 Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Correction : On a

$$|J_n| \leqslant e \int_0^1 x^n\, dx = \frac{e}{n}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$$

III.1.2 Etablir la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$.

Correction : (v_n) est une suite alternée, de limite nulle en l'infini. En outre

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \int_0^1 e^x (x^n - x^{n+1})\, dx \geqslant 0$$

car $\forall x \in [0,1],\ e^x(x^n - x^{n+1}) \geqslant 0$ (et les bornes sont dans le bon sens). On peut donc appliquer la critère spéciale des séries alternées pour affirmer que $\sum(v_n)$ converge.

III.2. Estimation intégrale de δ_n.

III.2.1 Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

Correction : L'égalité de Taylor avec reste intégrale indique que si u est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et si $a \in I$ alors

$$\forall x \in I,\ u(x) = u(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} u^{(n+1)}(t)\, dt$$

En appliquant ceci avec $u = \exp$, $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$, on obtient

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

III.2.2 Déduire de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n.

Correction : Pour $x = -1$, on a donc

$$e^{-1} = \frac{\beta_n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t \, dt$$

Le changement de variable $u = 1 + t$ donne alors

$$\delta_n = n! e^{-a} - \beta_n = e^{-1} v_n$$

III.3. Sur la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \delta_n$.

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

Correction : Comme $\sum(v_n)$ converge, il en est de même de $\sum(\delta_n)$.
Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 x^n e^x \, dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx$$

et donc $J_n = e - nJ_{n-1}$. Comme $J_n \to 0$, on a donc $nJ_{n-1} \to e$ et ainsi

$$J_n \sim \frac{e}{n+1}$$

$|v_n| = J_n$ est le terme général d'une série divergente et $\sum(\delta_n)$ n'est donc pas non plus absolument convergente.

III.4. Sur la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.1 Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

Correction : Avec l'équivalent précédent, on a

$$\frac{|\delta_n|}{n} = e^{-1} \frac{J_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme d'une série absolument convergente.

Il y a une suite mais pas encore abordable.