Correction : Devoir surveillé n°1

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 28 septembre 2023

Exercice I

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ f_n = h_n - \ln(n)$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n\varepsilon 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n})\ ;\ v_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$$

1) Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

Correction : La fonction est définie sur $]-\infty, 1[$. Au voisinage de 0, on a $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et donc

$$\boxed{x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

2) Soit n un entier naturel. Quel est le signe de u_n ?
Correction : Par concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a (courbe en dessous de sa tangente en 1)

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

En appliquant ceci pour $n \geqslant 2$ à $-\dfrac{1}{n}$, on obtient

$$\boxed{\forall n\varepsilon 2,\ u_n \leq 0}$$

3) Justifier que la série $\sum\limits_{n\varepsilon 1} u_n$ est convergente.

Correction : Par définition on a, pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln(1-\dfrac{1}{n})$. On en déduit, d'après le développement de la question **1)**, $u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série absolument convergente, ainsi

$$\boxed{\sum_{n\varepsilon 1} u_n \text{ est convergente}}$$

4) Etudier la fonction $(f\ :\ x \mapsto x - \ln(1+x))$ sur $[0,1]$.
Correction : f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad \text{donc } f'(x) \geqslant 0$$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,1]}$$

5) Justifier que la série $\sum\limits_{n\varepsilon 1} v_n$ est convergente.

Correction : Par définition on a, pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n})$. On en déduit, d'après le développement de la question **1)**, $v_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série absolument convergente, insi

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ est convergente}}$$

6) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.
En déduire une expression de $\sum\limits_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.
Correction : On a $v_1 - u_1 = -\ln(2)$ et

$$\forall n\varepsilon 2,\ v_n - u_n = -\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n}) = -\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n-1}{n}) = -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1)$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N}(u_n - v_n) = -\ln(2) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n+1) + 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n-1)$$

Les termes se simplifient et on trouve

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}(u_n - v_n) = \ln(N) - \ln(N+1)}$$

7) Que peut-on dire des suites $(\sum\limits_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum\limits_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum\limits_{n\varepsilon 1} v_n = \sum\limits_{n\varepsilon 1} u_n$.
Correction : Avec les questions **3)** et **5)**, les suites proposées convergent (sommes partielles de séries convergentes) et avec la question précédente, la différence vaut $-\ln(1+1/N)$ et est de limite nulle quand $N \to +\infty$. Par négativité de u_n pour $n\varepsilon 2$ (question 2) et positivité de v_n (question 4 qui donne la positivité de f sur $[0,1]$), la suite des sommes partielles de u décroît et celle des sommes partielles de v croît. Ainsi

$$\boxed{(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes}}$$

Par propriété des suites adjacentes on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$$

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum\limits_{n\varepsilon 1} v_n$ et $\sum\limits_{n\varepsilon 1} u_n$.

8) Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0,1[$.
Correction : par propriété des suites adjacentes on a

$$\forall n\varepsilon 1,\ \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Pour $n = 1$, on trouve $\gamma\varepsilon 1 - \ln(2) > 0$ et pour $n = 2$, $\gamma \leq 1 + u_2 < 1$.

$$\boxed{\gamma \in]0,1[}$$

9) Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$$

Correction : Par décroissance et continuité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1,+\infty[$, on a :
pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ donc $h_n - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ d'où $h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ donc $\ln(n+1) \leqslant h_n$.

$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1 : \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)}$

10) Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
Correction : On calcule

$$f_{n+1}-f_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n+1}+\ln(1-\frac{1}{n+1})=u_{n+1}$$

Or, pour $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant 0$, d'où

$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est décroissante.}}$$

11) Démontre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.
Indication : exprimer les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\varepsilon 1}^{N} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n).
Correction : D'après la question **9)**, pour $n\geqslant 1$, $\ln(n+1)\leqslant h_n$, donc, par croissance de la fonction ln, $0\leqslant \ln(n+1)-\ln(n)\leqslant f_n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante minorée, elle est donc convergente.

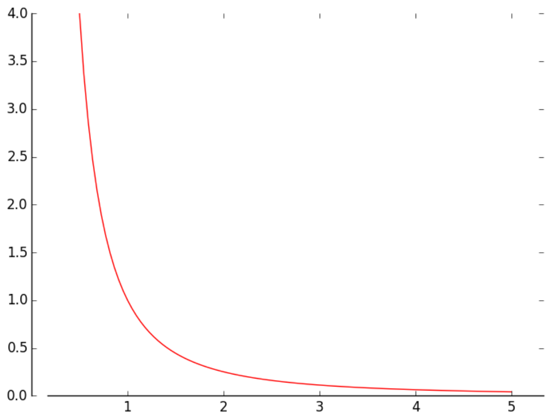
De plus, en sommant la relation trouvée à la question précédente, on a, par télescopage, $f_n-f_1=\sum\limits_{k=2}^{n}u_k$.

Or $f_1=1=u_1$, d'où $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. On en déduit le résultat :

$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est convergente et de limite }\gamma}$$

Soit r un entier naturel >1.

12) Dessiner le graphe de la fonction $(x\mapsto 1/x^r)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Correction : Pour $r>1$ la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^r}$ est décroissante, de limite infinie en 0, et de limite nulle en $+\infty$.



13) Soit a un nombre réel >0. Exprimer en fonction de a et r :

$$I(a)=\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^r}$$

Correction : Par propriété, pour $r>1$ et $a>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^r}\,dt$ est convergente. De plus on a :

$$[I(a)=\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^r}=\left[\frac{1}{1-r}\frac{1}{t^{t-1}}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(r-1)a^{r-1}}$$

14) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0.
On suppose que la suite $(n^r(w_{n+1}-w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell>0$.

a) Soient a,b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $0<a<\ell<b$. Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n\varepsilon N$, on ait les inégalités :

$$a\leq n^r(w_{n+1}-w_n)\leq b$$

Correction : On utilise la définition de la convergence pour $\varepsilon=\min(\ell-a,b-\ell)>0$, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geqslant N_0$: $\ell-\varepsilon\leqslant n^r(w_{n+1}-w_n)\leqslant \ell+\varepsilon$.
Or $\ell-\varepsilon\geqslant \ell-(\ell-a)\geqslant a$ et $\ell+\varepsilon\leqslant \ell+b-\ell\leqslant b$.
Posons $N=\max(N_0,2))$, on conclut : $\boxed{\forall n\geqslant N\geqslant 2:0\leqslant a<n^r(w_{n+1}-w_n)\leqslant b}$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N :

$$a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

Correction : Soit $n \geqslant N$. On a pour tout $k \in [\![N, n]\!]$: $0 < \frac{a}{k^r} < w_{k+1} - w_k < \frac{b}{k^r}$.

On somme sur k de N à n : $\sum_{k=N}^{n} \frac{a}{k^r} \leqslant \sum_{k=N}^{n} (w_{k+1} - w_k) \leqslant \sum_{k=N}^{n} \frac{b}{k^r}$.

Par téléscopage on a $\sum_{k=N}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_N$. De plus, par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^r}$, on a : $\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \sum_{k=N}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^r}\, dt$ et de même $\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^r} \geqslant \sum_{k=N}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^r}\, dt$. On en déduit par relation de Chasles :

$$\boxed{a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r}\, dt \leqslant w_{n+1} - w_N \leqslant b \int_{N-1}^{n} \frac{1}{t^r}\, dt}$$

c) En déduire l'encadrement :

$$-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)$$

où I a été défini dans la question 12(b).

Correction : On a d'après la question précédente : $-b \int_{N-1}^{n} \frac{1}{t^r}\, dt + w_{n+1} \leqslant w_N \leqslant -a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r}\, dt + w_{n+1}$.

D'après la convergence des intégrales et celle de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a

$\lim_{n \to +\infty} \Big(-b \int_{N-1}^{n} \frac{1}{t^r}\, dt + w_{n+1} \Big) = -b \int_{N-1}^{+\infty} \frac{1}{t^r}\, dt + 0 = -bI(N-1)$ et

$\lim_{n \to +\infty} \Big(-a \int_{N}^{n+1} \frac{1}{t^r}\, dt + w_{n+1} \Big) = -a \int_{N}^{+\infty} \frac{1}{t^r}\, dt + 0 = -aI(N)$, on conclut :

$$\boxed{-bI(N-1) \leqslant w_N \leqslant -aI(N)}$$

d) Démontrer que la suite $(n^{r-1} w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

Correction : On a, d'après la question précédente : $-b \frac{1}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leqslant w_N \leqslant -a \frac{1}{(r-1)N^{r-1}}$ d'où

$-b \frac{N^{r-1}}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leqslant N^{r-1} w_N \leqslant -a \frac{1}{(r-1)}$ ou encore

$a \leqslant -(r-1)N^{r-1} w_N \leqslant b \frac{N^{r-1}}{(N-1)^{r-1}}$.

Soit $\varepsilon > 0$, en prenant $a = \ell - \frac{\varepsilon}{2}$ et $b = \ell + \frac{\varepsilon}{2}$ et en remarquant que les résultats du b) et c) sont encore valables pour tout $n \geqslant N$ (et pas seulement pour N).

On a donc pour tout $n \geqslant N$: $\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant -(r-1)n^{r-1} w_n \leqslant (\ell + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}}$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} (\ell + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} = \ell + \frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N'$:

$(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} \leqslant \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$\forall n \geqslant \max(N, N')$: $\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant -(r-1)n^{r-1} w_n \leqslant (\ell + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} \leqslant \ell + \varepsilon$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^{r-1} w_n = \frac{-\ell}{r-1}}$$

e) Ce résultat reste-t-il vrai si la limite ℓ de la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est 0 ?

Correction : Le résultat reste vrai li la limite ℓ est nulle. On peut le justifier par exemple par les sommations de relations de comparaisons : Si $(n^r(w_{n+1} - w_n))$ tend vers 0 alors lorsque n tend vers l'infini : $w_{n+1} - w_n = o(\frac{1}{n^r})$ et comme $\frac{1}{n^r} > 0$, on peut appliquer les sommations des relations de comparaison dans le cas convergeant : $\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^r} \right)$ d'où $0 - w_n = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^r} \right)$ et par comparaison série-intégrale classique (à refaire) : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^r} \underset{n \to +\infty}{\sim} I(n)$.

$\boxed{\text{Le résultat est encore vrai si } \ell = 0}$

15) Démontrer qu'il existe un nombre réel α que l'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Correction : On veut $f_n - \gamma \sim \dfrac{\alpha}{n}$ soit $n^1(f_n - \gamma) \to \alpha$. Il suffirait que $n^2(w_{n+1} - w_n)$ converge avec $w_n = \gamma - f_n$ (et non $w_n = f_n - \gamma$ car on a vu au (c) que $w_n < 0$).
Posons $w_n = \gamma - f_n$, on a :
$n^2(w_{n+1} - w_n) = n^2(\gamma - f_{n+1} - \gamma + f_n) = n^2(-\dfrac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n))$
$= n^2(-\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ln(n) + \ln(1+\dfrac{1}{n}) - \ln(n))$
$\underset{n\to+\infty}{=} n^2\Big[-\dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\Big] \underset{n\to+\infty}{=} n^2(\dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} > 0.$
On applique le 12. avec $r = 2$ et $\ell = \dfrac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2-1} = -\dfrac{1}{2}$.
On en déduit que $n(\gamma - f_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2} + o(1)$, donc $\gamma - f_n = \gamma - h_n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$, on peut conclure.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$$

Exercice II

Partie I

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1) Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?
Correction : Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
Si $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1}$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2) Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Correction : Soient x et y deux réels positifs. On a : $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. Ce réel étant positif on en déduit que

$$\boxed{\forall x, y \geq 0, \ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$

3) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.
Correction : Par récurrence on montre que, pour tout n, a_n et b_n sont positifs. Avec la question précédente, on a donc, pour tout entier n, $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n \leqslant b_n$$

Soit $n \geqslant 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, et donc d'après ce qui précède $a_{n+1} \geqslant \sqrt{a_n^2}$, c'est à dire $a_{n+1} \geqslant a_n$. De même, par défintion de b_{n+1} et ce qui précède $b_{n+1} \leqslant b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

Comme, pour tout n non nul, $a_n \leqslant b_n$, de par leur monotonie les suites sont donc dans le segment $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.
Correction : D'après la question précédente et par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$. Comme a_1 est strictement positif les limites sont aussi strictement positives. On passe à la limite dans $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et on obtient que $\ell_b = \dfrac{\ell_a + \ell_b}{2}$. On obtient $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite}}$$

On notera $M(a,b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1,x)$.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a,b)$ les quantités suivantes :

$$M(b,a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$

Correction : Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite.
De même, Notons (α_n) et (β'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a_0$ et $\beta_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta_n = \lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{M(b,a) = M(a,b) \text{ et } \forall \lambda > 0,\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)}$$

6) Justifier que $M(a,b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$.
Correction : On utilise la question précédente avec $\lambda = \frac{1}{a}$: $\frac{1}{a}M(a,b) = M(1, b/a) = f(b/a)$. On a donc :

$$\boxed{M(a,b) = af\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

7) Justifier que les intégrales $I(a,b)$ et $J(a,b)$ convergent, puis que $J(a,b) = 2I(a,b)$.
Correction : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Au voisinage de plus ou moins infini on a $\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \sim \dfrac{1}{t^2}$ or les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt$ sont convergentes, donc

$$\boxed{I(a,b) \text{ et } J(a,b) \text{ existent}}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ étant paire, en effectuant le changement de variable $x = -t$, de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\,dt$ sont égales . Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a,b) = 2I(a,b)}$$

8) En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)$$

Correction : $s \mapsto \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $s \mapsto \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right)$ qui ne s'annule pas. C'est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc effectuer le changement de variable. Posons $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2-ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec l'abus d'écriture usuelle

$$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right)ds = \frac{1}{2s^2}(s^2+ab)ds$$

On en déduit que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2)(\sqrt{ab}^2 + t^2)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2s^2}(s^2+ab)}{\sqrt{\frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)\frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2}}\,\mathrm{d}s$$

Par simplification on obtient

$$\boxed{J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)}$$

9) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)$$

Correction : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $I(a_n, b_n) = I(a,b)$.

- Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $I(a_n, b_n) = I(a,b)$. D'après la question **7)**, la question précédente et la définition des suites, on a, avec aussi $J(c,d) = J(d,c)$,

$$2I(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_{n+1}, b_{n+1}) = J\left(\sqrt{a_nb_n}, \frac{a_n+b_n}{2}\right) = 2I(a_n, b_n)$$

le résultat reste vrai au rang $n+1$. Par théorème de récurrence on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)}$$

10) Question à admettre sauf pour les 5/2 Justifier que

$$I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)$$

Correction : On veut passer à la limite ci-dessus et, pour cela, utiliser un théorème d'interversion limite-intégrale. On propose le théorème de convergence dominée.

- $f_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Comme pour tout $n \geq 1$ on a $a_n, b_n \geq a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leq \frac{1}{a_1^2 + t^2}$$

Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendant de n).

Le théorème s'applique et donne

$$\boxed{I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)}$$

On énoncera précisément le théorème utilisé.

11) Conclure que
$$M(a,b)=\frac{\pi}{2I(a,b)}$$

Correction : On remarque que
$$\forall \alpha>0,\ I(\alpha,\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\alpha^2}=\left[\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\alpha}$$

Ainsi, avec la question 10,
$$I(a,b)=\frac{\pi}{2M(a,b)}$$

ou encore
$$\boxed{M(a,b)=\frac{\pi}{2I(a,b)}}$$

Partie III

12) On fixe $x>0$. En effectuant le changement de variable $t=\frac{x}{s}$, montrer que
$$I(1,x)=2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Correction : $s\mapsto\dfrac{x}{s}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée $s\mapsto-\dfrac{x}{s^2}$ ne s'annule pas. C'est donc une bijection de $[\sqrt{x},+\infty[$ dans $]0,\sqrt{x}]$. Par changement de variable on obtient
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,\mathrm{d}t &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}}\frac{(-x/s^2)}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}}\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Par relation de Chasles, on a
$$I(1,x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\,\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(s^2+x^2\,\mathrm{d}s)(1+s^2)}}$$

On conclut ainsi que
$$\boxed{\forall x>0,\ I(1,x)=2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t}$$

13) Montrer que $I(1,x)-2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ est négligeable devant $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0^+.
Correction : Remarquons que
$$\forall t\geq 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right|\leqslant\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\leqslant\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Par convexité de $y\mapsto\sqrt{y}$ (courbe en dessous de la tangente en $y=1$) on a aussi
$$\forall y\geq -1,\ \sqrt{1+y}\leq 1+\frac{y}{2}$$

Ainsi,
$$\forall t\in[0,\sqrt{x}],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right|\leqslant\frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intégre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ pour obtenir
$$\left|I(1,x)-2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}}\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right|\mathrm{d}t\leqslant x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

14) Dériver $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Correction : La dérivée de $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = \dfrac{t}{x}$, on. a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \left[\ln(s+\sqrt{1+s^2})\right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

15) Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

Correction : On a

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x+1})$$

qui équivaut à $-\ln(x)/2$ quand $x \to 0^+$.
Or, d'après la question 13, quand $x \to 0$

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$

On en déduit avec la question 14 que

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

16) Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

Correction : On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0^+$ et la question précédente donne alors

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

17) **On admettra cette question** Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Correction : On sait que

$$\forall x > 0,\ f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$$

On va alors prouver que $x \mapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(a^2+t^2)}}$. On a vu en question 7 que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème évoqué donne $x \mapsto I(1,x) \in C^0(\mathbb{R}^{+*})$ est ainsi (théorèmes d'opération)

$$\boxed{f \in C^0(\mathbb{R}^{+*})}$$

18) Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?
Correction : La question 15 donne $f(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et donc

$$\boxed{\text{On prolonge } f \text{ par continuité en posant } f(0) = 0}$$

On a aussi

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x\ln(x)} \to +\infty$$

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale}}$$

19) Que dire de la branche infinie de la courbe f en $+\infty$.
Correction : Avec la question 16,

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$$

Au voisinage de $+\infty$, on a ainsi une direction asymptotique horizontale. Comme f est de limite infinie en $+\infty$ (toujours la question 16)

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente en } +\infty \text{ une branche parabolique horizontale}}$$

20) Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0, +\infty[$.
Correction : L'expression de $I(1,x)$ montre que si $0 \leq x \leq y$, $I(1,x) \geq I(1,y)$. $x \mapsto I(1,x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs > 0. Ainsi, avec l'expression rappelée en question 17, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.