Devoir surveillé n°1

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 28 septembre 2023

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence!!
Le sujet comporte deux exercices indépendants.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Exercice I

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ f_n = h_n - \ln(n)$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \ \text{ et pour } \ n \geq 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n})\ ;\ v_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$$

1) Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

2) Soit n un entier naturel. Quel est le signe de u_n ?

3) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ est convergente.

4) Etudier la fonction $(f\ :\ x \mapsto x - \ln(1+x))$ sur $[0,1]$.

5) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq1} v_n$ est convergente.

6) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.

En déduire une expression de $\sum\limits_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.

7) Que peut-on dire des suites $(\sum\limits_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum\limits_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum\limits_{n\geq1} v_n = \sum\limits_{n\geq1} u_n$.

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum\limits_{n\geq1} v_n$ et $\sum\limits_{n\geq1} u_n$.

8) Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0,1[$.

9) Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$$

10) Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

11) Démontre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.

Indication : exprimer les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq1}^{N} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n).

Soit r un entier naturel > 1.

12) Dessiner le graphe de la fonction $(x \mapsto 1/x^r)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

13) Soit a un nombre réel > 0. Exprimer en fonction de a et r :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^r}$$

14) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0.

On suppose que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.

a) Soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < a < \ell < b$. Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait les inégalités :

$$a \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq b$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N :

$$a\int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b\int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

c) En déduire l'encadrement :

$$-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)$$

où I a été défini dans la question 12(b).

d) Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

e) Ce résultat reste-t-il vrai si la limite ℓ de la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 ?

15) Démontrer qu'il existe un nombre réel α que l'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Exercice II

Partie I

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1) Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?

2) Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

3) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.

4) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :

$$M(b, a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$

6) Justifier que $M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$.

Partie II

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

7) Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.

8) En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$$

9) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

10) **Question à admettre sauf pour les 5/2** Justifier que

$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)$$

On énoncera précisément le théorème utilisé.

11) Conclure que

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$$

Partie III

12) On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que

$$I(1, x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}\sqrt{x^2 + t^2}}\, dt$$

13) Montrer que $I(1, x) - 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}\, dt$ est négligeable devant $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}\, dt$ quand x tend vers 0^+.

14) Dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}\, dt$.

15) Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

16) Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

17) **On admettra cette question** Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

18) Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?

19) Que dire de la branche infinie de la courbe f en $+\infty$.

20) Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0, +\infty[$.