Devoir surveillé n°1

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 26 septembre 2024

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence ! !

Le sujet comporte un petit problème d'algèbre et un problème d'analyse. Vous devez traitez les deux.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Problème d'algèbre : Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3**.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Partie A

1) On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.
Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2) Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3) Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\ker(u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
- (a) Montrer que $\mathrm{Im}(w) \subset \ker(u^i)$.
- (b) En déduire que $\dim(\ker(u^{i+j})) \leqslant \dim(\ker(u^i)) + \dim(\ker(u^j))$.

4) Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{rang}(u) = 2$.
- (a) Montrer que $\dim(\ker(u^2)) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).
- (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
- (c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5) Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{rang}\, u = 1$.
- (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
- (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
- (c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

6) Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

7) Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

8) On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9) On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **4)**, une matrice semblable à la matrice M.

(b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rang}(M)$.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10) On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11) **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12) Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Problème d'analyse

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p - x| < \frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x.

Objectifs.

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1} n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$.

Dans la partie **I** on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie **II** on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n. La partie **III** est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des deux séries $\sum_{n \geqslant 0} \delta_n$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

I) Les suites α et β.

On définit la suite α par $\alpha_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$$

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$;
en particulier, pour $x=-1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\beta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Etude de la suite α.

1) Expliciter α_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.

2) Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.

Etude de la suite β.

3) Expliciter β_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.

4) Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.

5) Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

6) Comparer les deux suites α et β.

Etude de ρ_n.

7) Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

8) Etablir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
L'inégalité est-elle stricte ?

9) Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $\mathrm{e}^{-1}\, n!$.

Etude d'une fonction.
On désigne par f la fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ (au moins) sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et}, \quad \forall x \in]-1,1[, \ (1-x)f'(x) - xf(x) = 0$$

10) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f. Expliciter $f(x)$ pour tout x de $]-1,1[$.

11) Justifier l'affirmation : « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ ».

12) Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n : $(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

13) En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

II La suite γ.

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel.
Pour $n \geqslant 1$, on note :

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est à dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même.
- γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathcal{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$ on adopte la convention : $\gamma_0 = 1$.

14) Calculer γ_1 et γ_2.

15) Classer les éléments de $\mathcal{S}_3$ selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3.

16) On suppose dans cette question que $n = 4$.

- **a)** Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant deux points fixes ?
- **b)** Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant un point fixe ?
- **c)** Calculer γ_4.

Relation entre les γ_k

17) Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$.

18) Si k est un entier dans $[\![0,n]\!]$, combien d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

19) Etablir pour tout entier naturel n la relation : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k = n!$.

20) Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ et l'on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

a) Montrer que la série converge pour tout $x \in \,]-1, 1[$.

b) Pour tout x de $]-1, 1[$, on pose $h(x) = \mathrm{e}^x\, g(x)$.

Ecrire, pour $x \in \,]-1, 1[$ et en justifiant son existence, $h(x)$ sous forme d'une série de la forme $\sum c_n x^n$, où c_n ne dépend pas de x.

c) Expliciter $g(x)$ pour tout nombre réel x de $]-1, 1[$.

On déduit de la question précédente que pour tout $x \in]-1, 1[$, $h(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et donc pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} = f(x)$.

d) Comparer les deux suites β et γ.
C'est une question à admettre car l'ensemble des connaissances actuelles n'est pas suffisant : $\alpha = \beta$

e) La fonction g est-elle définie en 1 ?

f) La fonction g est-elle définie en -1 ?

III Sur $\delta_n = \mathrm{e}^{-1}\, n! - \beta_n$.

Pour tout entier naturel n, on note : $\delta_n = \mathrm{e}^{-1}\, n! - \beta_n$, $\quad J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$, $\quad v_n = (-1)^{n+1} J_n$

La série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$

21) Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

22) Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Estimation intégrale de δ_n.

23) Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

24) Déduire de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n.

25) **Sur la série $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$.**
Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

Sur la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

26) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

Il y a une suite mais pas encore abordable.