Correction : Devoir maison n°6

MP Clemenceau 2022-23

Pour le mercredi 9 mars 2023

Les fonctions de Lambert

Objectifs

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriéts des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

Dépendance des parties

Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III et IV. Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

Notations

Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\binom{n}{k}$.

Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I - Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Correction : L'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant que produit d'une application polynomiale et de l'exponentielle. On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x. \tag{1}$$

Ainsi, pour tout $x > -1$, on a $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$; comme de plus elle est continue, on en déduit qu'elle définit une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $\left[f(-1), \lim\limits_{+\infty} f\right[$, d'après le théorème de la bijection monotone. Or on a $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $I = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Correction : L'application W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ en tant que bijection réciproque de la restriction à $[-1, +\infty[$ de l'application f (dont l'ensemble image est $[-e^{-1}, +\infty[$, on l'a vu). Pour justifier qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$, il suffit de constater que non seulement f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, mais qu'en plus on a : $\forall x > -1$, $f'(x) \neq 0$: chose qui est immédiate d'après le calcul de dérivée effectué en (**??**). Ainsi W est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Correction : On sait que $W(0)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = 0$ d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$. Or $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, donc $W(0) = 0$.

Pour calculer la dérivée de W, on rappelle qu'en tant que bijection réciproque de f, on a :

$$\forall x > -e^{-1}, \quad W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}.$$

En particulier :

$$W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = \frac{1}{f'(0)} \overset{(??)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction : D'après le théorème de Taylor-Young, on a pour tout x au voisinage de 0 :

$$W(x) = W(0) + W'(0)x + \underset{x\to 0}{o}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Pour un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$, notons que par définition d'une application réciproque on a :

$$\forall x \geqslant -e^{-1}, \quad f(W(x)) = x \Longleftrightarrow \forall x \geqslant -e^{-1}, \quad W(x)e^{W(x)} = x,$$

et donc : $\forall x \geqslant -e^{-1}$, $W(x) = xe^{-W(x)}$. Cette égalité prouve à la fois que W est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pouvait aussi le déduire du fait que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$), et qu'on a : $\forall x \geqslant -e^{-1}$, $\ln(W(x)) = \ln(x) - W(x)$, donc :

$$\forall x > 0, \quad W(x) = \ln(x) - \ln(W(x)). \tag{2}$$

Encadrons $W(x)$ pour tout x assez grand, pour démontrer que $\ln(W(x))$ est négligeable devant $\ln(x)$ quand $x \to +\infty$: tout d'abord, on a $W(x) \geqslant 1$ pour tout x assez grand, étant donné que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (plus précisément, c'est vrai pour $x \geqslant e$). Cela donne $\ln(W(x)) \geqslant 0$, et donc combiné à (**??**) on a : $W(x) \leqslant \ln(x)$. Ainsi, pour tout x assez grand :

$$1 \leqslant W(x) \leqslant \ln(x), \text{ c'est-à-dire : } 0 \leqslant \ln(W(x)) \leqslant \ln(\ln(x)).$$

Donc, pour tout x au voisinage de $+\infty$, toujours en utilisant (**??**) :

$$W(x) = \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln(\ln(x))) = \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln(x)),$$

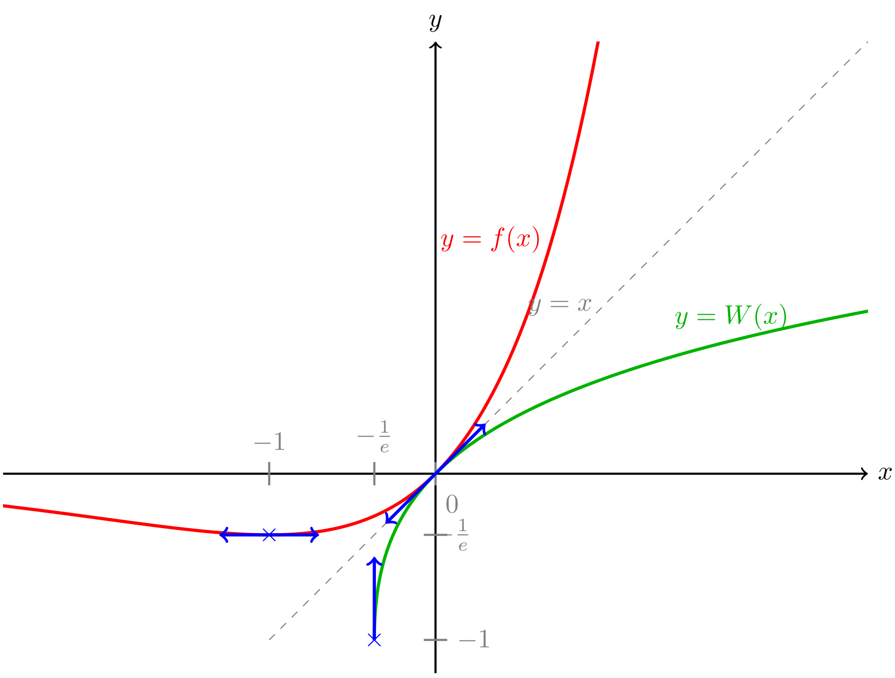
c'est-à-dire :

$$W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$$

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.

Correction : Nous savons que le graphe de f et celui de W sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Tracer l'un suffit donc à en déduire l'autre. Nous avons déjà assuré que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$; de plus, notons que $f'(-1) = 0$, ce qui permet de préciser l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de -1 (tangente horizontale), et par symétrie on a l'allure de $\mathcal{C}_W$ au voisinage de $-e^{-1}$ (tangente verticale).

Nous connaissons également $W'(0) = 1$, ce qui nous permet de tracer la tangente en 0 à la courbe de W. Tout ceci étant considéré, voici les graphes demandés :



Nous aurions aussi pu utiliser le tracé du logarithme pour en déduire, asymptotiquement, celui de W (étant donné que $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$), mais attention à ne pas abuser de ce que permet de conjecturer cet équivalent : on peut en effet démontrer facilement, partant des calculs de la question précédente, que :

$$W(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \underset{x\to+\infty}{o}(1),$$

et en particulier $W(x) - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$: leurs graphes respectifs s'écartent.

Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $\quad x \longmapsto x^\alpha W(x) \quad$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

Correction : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, d'après la question **Q4.**, on a : $x^\alpha W(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha+1} > 0$, et la fonction de Riemann $x \mapsto x^{\alpha+1} = \dfrac{1}{x^{-\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $-\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -2$. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est donc intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si : $\alpha > -2$.

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $\quad x \longmapsto x^\alpha W(x) \quad$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

Correction : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $[1,+\infty[$, et on a d'après la question **Q4.** : $x^\alpha W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \ln(x) > 0$. On en déduit que l'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si l'application $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ l'est. Pour étudier son intégrabilité, nous allons la comparer à des fonctions de Riemann.

Si $\alpha \geqslant -1$ alors l'inégalité $x^\alpha \ln(x) \geqslant x^\alpha$, valable pour tout x assez grand (par exemple $x \geqslant e$), montre que la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, parce que la fonction $x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ si $-\alpha \leqslant 1$ (c'est-à-dire $\alpha \geqslant -1$, ce qu'on a supposé).

Si $\alpha < -1$, alors en prenant $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > 1$ et $s < -\alpha$ (par exemple : $s = \frac{1-\alpha}{2}$), nous avons pour tout x au voisinage de $+\infty$.

$$x^s x^\alpha \ln(x) = x^{s+\alpha} \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après le théorème des croissances comparées (car $s+\alpha < 0$ par hypothèse sur s). Donc : $x^\alpha \ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^s}\right)$. Et comme $s > 1$, la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ l'est également.

En conclusion : $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$. D'après ce qui précède, on en déduit que l'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$: d'où le résultat.

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty,-1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1},0[$.

Correction : On reprend le calcul de la question **Q1.**, sauf qu'on note cette fois-ci que $f'(x) < 0$ pour tout $x < 1$, et donc que f est strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$, et le théorème de la bijection monotone implique que f réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ dans $[f(-1), \lim\limits_{-\infty} f[= \left[-\frac{1}{e}, 0\right[$ (la limite est nulle en $-\infty$ d'après le théorème des croissances comparées). D'où le résultat.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notéeV.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (**??**).
Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Correction : On rappelle que par définition d'une bijection :

- $W(x)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = x$ d'inconnue t DANS $[-1,+\infty[$, et pour x DANS $[-e^{-1},+\infty[$;
- $V(x)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = x$ d'inconnue t DANS $]-\infty,-1]$, et pour x DANS $[-e^{-1},0[$;

Il n'y a ambiguïté sur les solutions à l'équation $f(t) = x$ que si x est dans l'intervalle de définition commun à V et W, c'est-à-dire si :

$$x \in [-e^{-1},+\infty[\cap[-e^{-1},0[= [-e^{-1},0[.$$

Dans ce cas, $f(t) = x$ a deux solutions : $V(x) \in]-\infty,-1]$ et $W(x) \in [-1,+\infty[$. Il n'y en a pas d'autre, sinon cela contredirait l'injectivité de f soit sur $]-\infty,-1]$, soit sur $[-1,+\infty[$.

Enfin, notons que $f(-1) = -e^{-1}$, et que f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ puis strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Cette étude montre à la fois qu'il n'y a pas de solution à l'équation $f(t) = x$ si $x < -e^{-1}$ (puisqu'il s'agit du minimum de la fonction), et que l'équation $f(t) = -e^{-1}$ n'a qu'une unique solution pour $t \in \mathbb{R}$, et on en déduit : $W(-e^{-1}) = V(-e^{-1}) = -1$.

On peut donc répondre à la question : si $m \in \mathbb{R}$, alors le nombre de solutions à l'équation $xe^x = m$ (qui équivaut à $f(x) = m$), d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est :

- zéro si $m \in]-\infty, -e^{-1}[$;
- une si $m = -e^{-1}$ ou si $m \geqslant 0$: dans ce cas l'unique solution est $W(m)$;
- deux si $m \in]-e^{-1}, 0[$: dans ce cas les solutions sont $W(m)$ et $V(m)$.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer suivant les valeurs de m le de solutions de (**??**).
Illustrer graphiquement les différents cas.

Correction : On raisonne de façon similaire à la question précédente, mais cette fois en tenant compte du fait que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ (de sorte que f renverse les inégalités si et seulement si son argument est inférieur à -1). En particulier, pour m dans l'intervalle $[-e^{-1}, 0[$ commun à V et W, on a $m = f(W(m))$ et $m = f(V(m))$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$xe^x \leqslant m \iff f(x) \leqslant f(W(m)) = f(V(m)) \iff \begin{cases} x \leqslant W(m) \text{ si } x \in [-1, +\infty[, \\ x \geqslant V(m) \text{ si } x \in]-\infty, -1], \end{cases}$$

Pour m dans les autres intervalles, l'étude n'a pas de complication particulière. Notons tout de même que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \leqslant -1$, donc si $m \geqslant 0$ alors $f(x) \leqslant m$ pour tout $x < -1$: le cas $x < -1$ est alors trivial dans ce cas, et on peut se contenter de l'étude si $x \geqslant -1$, ce qui permet de résoudre l'inéquation en recourant à la fonction W.

On en déduit que si $m \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions à l'inéquation $xe^x \leqslant m$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est :

- vide si $m \in]-\infty, -e^{-1}[$;
- $]-\infty, -1] \cup [-1, W(m)] =]-\infty, W(m)]$ si $m \geqslant 0$;
- $([V(m), +\infty[\cap]-\infty, -1]) \cup (]-\infty, W(m)] \cap [-1, +\infty[) = [V(m), W(m)]$ si $m \in]-e^{-1}, 0[$.

Représentons graphiquement ces intervalles de solutions sur la figure . Je représente en vert l'intervalle sur lequel l'inéquation $xe^x \leqslant m$ est vérifiée, et en bleu la portion de graphe correspondante.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (**??**).
Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Correction : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Notons que l'équation de l'énoncé équivaut à :

$$bxe^{-ax} = -1 \iff -axe^{-ax} = \frac{a}{b} \iff f(-ax) = \frac{a}{b}.$$

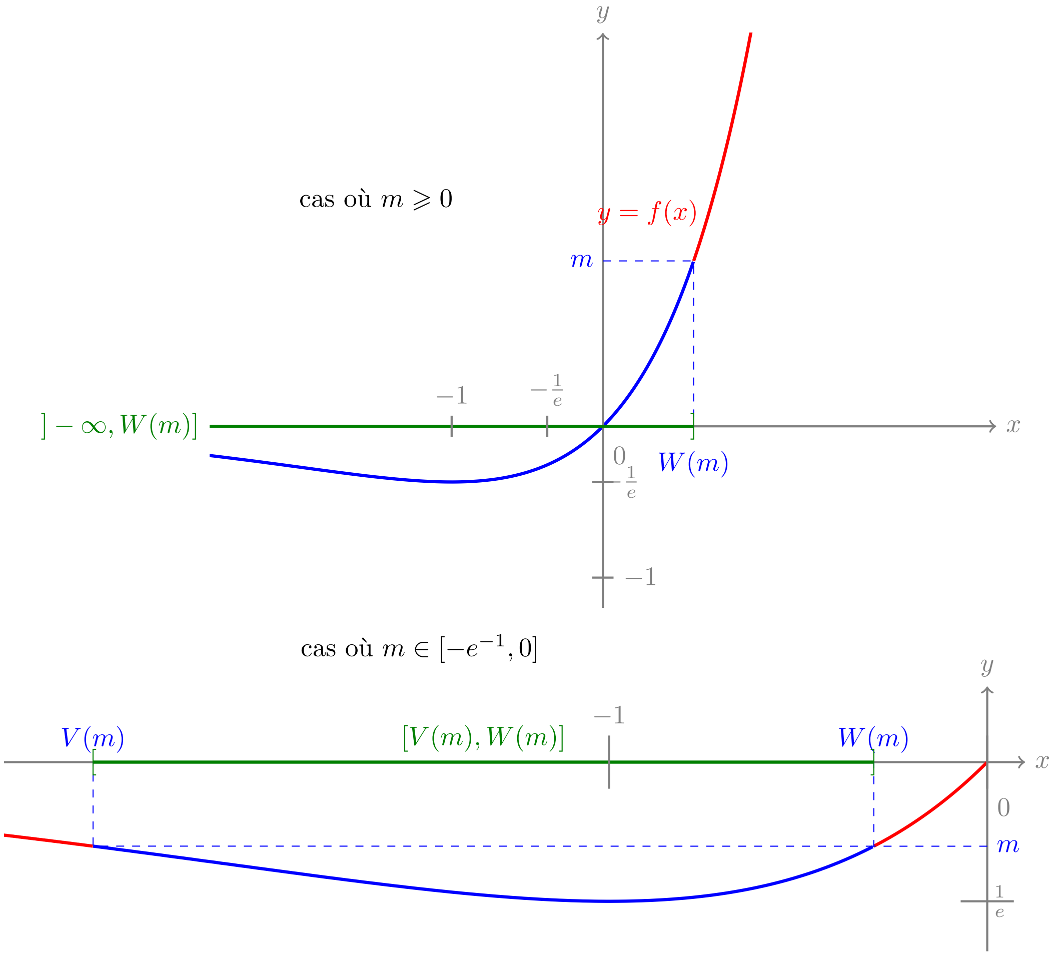
D'après l'étude que nous avons faite dans la question **Q9.**, on en déduit les solutions éventuelles suivantes :

- si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, alors cette équation n'a pas de solution ;
- si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$ ou $\frac{a}{b} \geqslant 0$, alors une solution $x \in \mathbb{R}$ de cette équation vérifie $-ax = W\left(\frac{a}{b}\right)$, c'est-à-dire : $x = -\frac{1}{a} W\left(\frac{a}{b}\right)$;
- si $\frac{a}{b} \in]-e^{-1}, 0[$, alors un raisonnement analogue à celui ci-dessus montre que les solutions sont $-\frac{1}{a} W\left(\frac{a}{b}\right)$ et $-\frac{1}{a} V\left(\frac{a}{b}\right)$.

II - Probabilités

On étudie dans cette partie deux situations dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement

FIGURE 1 – Représentation graphique des solutions à l'inéquation $xe^x \leqslant m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.



$\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

II.A - *Première situation*

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire. Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0, 1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (**??**).

Q 12. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.

Correction : Il est clair que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, les données de l'énoncé nous permettent d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et p (puisqu'il s'agit de compter le nombre de succès – avoir un billet gagnant – dans une série de n épreuves de Bernoulli – acheter un billet – indépendantes et de même paramètre p). On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

En particulier cette probabilité est nulle si $k > n$.

On en déduit la loi de X en utilisant la formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $((N=n))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n, X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n, X=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n'=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n'+k}}{(n'+k)!}\binom{n'+k}{k}p^k(1-p)^{n'} \qquad (n'=n-k) \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n'}}{(n')!}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme de la série exponentielle, évaluée en $\lambda(1-p)$. On en déduit :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

On reconnaît bel et bien une loi de Poisson de paramètre λp, comme attendu. De cela on déduit immédiatement que X admet une espérance et une variance, et qu'on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p.$$

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$ alors la condition (**??**) est satisfaite.

Correction : Comme X est positive et admet une espérance, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\mathbb{P}(X\geqslant 2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2}.$$

Par conséquent, si $p\leqslant \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$, alors $\lambda p\leqslant 2(1-\alpha)$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(X\geqslant 2)\leqslant \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha,$$

ce qui démontre que la condition (II.1) est satisfaite.

Q 14. On pose $x=-(\lambda p+1)$. Démontrer que la condition (**??**) est équivalente à la condition

$$x\,\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha\,\mathrm{e}^{-1}$$

Correction : On a :

$$\mathbb{P}(X\geqslant 2) = 1-\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(X=1) = 1-e^{-\lambda p}-e^{-\lambda p}(\lambda p).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X\geqslant 2)\leqslant 1-\alpha \iff -e^{-\lambda p}(1+\lambda p)\leqslant -\alpha \overset{[\times e^{-1}]}{\iff} -(1+\lambda p)e^{-(\lambda p+1)}\leqslant -\alpha e^{-1},$$

d'où le résultat en posant $x=-(\lambda p+1)$.

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **Q10**, discuter selon la position de λ par rapport à $-1-V(-\alpha\,\mathrm{e}^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p\in]0,1[$ satisfaisant la condition (**??**).

Correction : D'après la question précédente, la condition (II.1) équivaut à l'inégalité $f(x)\leqslant -\alpha e^{-1}$. Comme $\alpha\in]0,1[$, on a $-\alpha e^{-1}\in]-e^{-1},0[$, donc l'étude de la question **Q10** montre que cette inégalité est vérifiée pour :

$$x\in[V(-\alpha e^{-1}), W(-\alpha e^{-1})] \overset{[p=-\frac{x+1}{\lambda}]}{\iff} p\in\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}\right].$$

D'après la question **Q13.**, tout réel $p \in]0,1[$ vérifiant $p \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$ (et il en existe) vérifie la condition (II.1), donc :

$$\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}\right] \cap]0,1[\neq \emptyset.$$

Néanmoins l'énoncé est plus précis et veut l'existence d'un plus grand élément $p \in]0,1[$ tel que la condition (II.1) soit vérifiée. Autrement dit, on veut exclure la possibilité que $\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}\right] \cap]0,1[$ ait pour borne supérieure 1 (avec l'intervalle qui y est ouvert). Cette condition est évitée à la condition que $-\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda} < 1$. Par conséquent, il existe un plus grand réel $p \in]0,1[$ vérifiant la condition (II.1) si et seulement si :

$$\lambda > -1 - V(-\alpha e^{-1}),$$

et dans ce cas $p = -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}$ est le plus grand réel à convenir.

II.B - *Deuxième situation*

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1-p \in]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \tag{II.2}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (**??**).

Q 16. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Correction : Au vu des données, X compte le nombre de « succès » – inversion d'un bit – dans une série de r épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre $1-p$. Par conséquent X suit une loi binomiale de paramètres r et $1-p$. On en déduit que X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = r(1-p), \quad \mathbb{V}(X) = r(1-p)p.$$

Q 17. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (**??**) est satisfaite.

Correction : Comme X est positive et admet une espérance, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{r(1-p)}{2}.$$

Par conséquent, si $r \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{1-p}$, alors $r(1-p) \leqslant 2(1-\alpha)$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha,$$

ce qui démontre que la condition (II.1) est satisfaite.

Q 18. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Démontrer que la condition (**??**) est équivalente à la condition

$$x\,\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha a\,\mathrm{e}^{-a}$$

Correction : On a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - p^r - rp^{r-1}(1-p). \tag{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \iff -(p^r + rp^{r-1}(1-p)) \leqslant -\alpha &\iff -p^r\,(p + r(1-p)) \leqslant -\alpha p \\ &\iff -e^{r\ln(p)}\,(p + r(1-p)) \leqslant -\alpha p\end{aligned}$$

Il apparaît « presque » la fonction f, puisque nous avons $r(p-1)e^{r\ln(p)}$ dans le membre de gauche en développant. Il suffit de multiplier par $\frac{\ln(p)}{p-1} > 0$ pour faire apparaître la fonction f (puisqu'on aura alors $r\ln(p)e^{r\ln(p)} = f(r\ln(p))$), et c'est ce qui motive ce qui suit (ainsi que le choix de a et x dans l'énoncé). Il restera à effectuer quelques menus réarrangements à cause du terme $e^{r\ln(p)} \cdot p$ que nous devons « inclure » au terme en f, et c'est pourquoi nous n'aurons pas exactement $f(r\ln(p))$ à la fin. Reprenons :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \Longleftrightarrow -e^{r\ln(p)}\Big(\underbrace{\frac{p}{p-1}\ln(p)}_{\substack{\text{terme manquant}\\ \text{dans l'exponentielle}}} \quad -r\ln(p)\Big) \leqslant -\alpha\frac{p\ln(p)}{p-1}$$

$$\overset{[\times e^{\frac{p}{1-p}\ln(p)}]}{\Longleftrightarrow} e^{r\ln(p)+\frac{p\ln(p)}{1-p}}\left(\frac{p}{1-p}\ln(p)+r\ln(p)\right) \leqslant -\alpha\frac{p\ln(p)}{p-1}e^{-\frac{p}{1-p}\ln(p)}.$$

Posons $a = \frac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Alors, d'après les calculs ci-dessus, nous avons bien :

$$xe^x \leqslant -\alpha a e^{-a},$$

d'où le résultat.

Q 19. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **10**, étudier l'existence d'un plus grand entier naturel r satisfaisant la condition (**??**).

Correction : La condition (II.2) est vérifiée si et seulement si $f(x) \leqslant -\alpha a e^{-a}$, avec $x = r\ln(p) - a$. Pour résoudre cette inéquation en utilisant la question **Q10.**, encore faut-il situer $-\alpha a e^{-a} < 0$ par rapport à $-e^{-1}$; or $-ae^{-a} = f(-a)$, et $-e^{-1}$ est le minimum de la fonction f, donc : $-ae^{-a} \geqslant -e^{-1}$. Il est de plus clair que $-ae^{-a} < 0$, donc après multiplication par $\alpha \in]0,1[$ on en déduit :

$$-e^{-1} < -\alpha a e^{-a} < 0.$$

On peut donc statuer sur l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -\alpha a e^{-a}$, et on en déduit que la condition (II.2) est vérifiée si et seulement si :

$$x \in \left[V\left(-\alpha a e^{-a}\right), W(-\alpha a e^{-a})\right] \overset{[r=\frac{x+a}{\ln(p)}]}{\Longleftrightarrow} r \in \left[\frac{W(-\alpha a e^{-a})+a}{\ln(p)}, \frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right)+a}{\ln(p)}\right],$$

en prenant garde au fait que $\ln(p) < 0$ car $p < 1$.

On veut toutefois que r soit un entier naturel non nul (c'est la longueur d'un bloc de bits). Autrement dit, on veut montrer que le plus grand élément de l'ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{W(-\alpha a e^{-a})+a}{\ln(p)}, \frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right)+a}{\ln(p)}\right] \cap \mathbb{N}$$

existe, et est supérieur ou égal à 1.

Or l'égalité (**??**) avec $r = 1$ donne $P(X \leqslant 2) = 0 \leqslant 1 - \alpha$, donc $r = 1$ vérifie trivialement la condition (II.2). Autrement dit, $1 \in \mathcal{S}$. On en déduit que $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et majoré (par $\frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right)+a}{\ln(p)}$), donc il admet un plus grand élément, et ce plus grand élément doit être supérieur ou égal à 1 car $1 \in \mathcal{S}$: d'où le résultat.

Q 20. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

Correction : Il suffit de prendre :

$$r = \left\lfloor \frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right)+a}{\ln(p)} \right\rfloor$$

.

III - Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie **I** est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III.A - *Le théorème binomial d'Abel*

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!]\,, \quad A_k = \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 21. Démontrer que la famille $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction : Il est clair que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(A_k) = k$. La famille $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une famille de $\mathbb{C}_n[X]$ échelonnée en degré : elle est libre. De plus son cardinal égale $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, donc c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$: d'où le résultat.

Q 22. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]\,, \quad A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$

Correction : Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k = 1$ la vérification est immédiate. Supposons donc $k \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
A_k'(X) &= \frac{1}{k!}(X - ka)^{k-1} + \frac{1}{k!} X \cdot (k-1)(X - ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!} \left((X - ka) + (k-1)X\right)(X - ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!} \left(kX - ka\right)(X - ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}(X - a)\left((X - a) - (k-1)a\right)^{k-2} = A_{k-1}(X - a),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Q 23. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Correction : Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n]\!]$. Si $j > k$, alors $A_k^{(j)} = 0$ car A_k est de degré k, et donc : $A_k^{(j)}(ja) = 0$. Supposons à présent $j \leqslant k$. La question précédente implique, par une récurrence immédiate :

$$A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja),$$

et donc : $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$. Or il est facile de vérifier qu'on a $A_\ell(0) = 1$ si $\ell = 0$ et $A_\ell(1) = 0$ si $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$ si $k - j > 0$, tandis que $A_k^{(j)}(ja) = 1$ si $k - j = 0$.
En conclusion :

$$A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$

Q 24. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]\,, \quad \alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Correction : Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Si l'on dérive j fois l'égalité $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ et qu'on l'évalue en ja, alors la question précédente nous permet d'écrire :

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) = \alpha_j,$$

d'où le résultat.

Q 25. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall\,(a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \quad (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x - ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}$$

Correction : Soit $(a, x, y) \in \mathbb{C}^3$. On applique la question précédente au polynôme $P = (X+y)^n$, et on a alors :

$$(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka)A_k = P^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(ka)X(X-ka)^{k-1},$$

et comme $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on en déduit aisément :

$$(X+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} X(ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1}.$$

Il reste à évaluer cette égalité en x pour en déduire le résultat voulu :

$$(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(ka+y)^{n-k}(x-ka)^{k-1}.$$

Q 26. Établir la relation,

$$\forall\, (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Correction : L'identité demandée est triviale si $n = 0$ et nous prenons donc $n \geqslant 1$. Dérivons la relation de la question précédente (l'égalité polynomiale, ou l'égalité pour une variable réelle x, s'il choque de dériver selon une variable complexe). On obtient alors, pour tout $(x, a, y) \in \mathbb{C}^3$:

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ka+y)^{n-k}(x-ka)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(ka+y)^{n-k}(k-1)(x-ka)^{k-2}.$$

En posant $x = 0$ la seconde somme s'annule, et donc :

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ka+y)^{n-k}(-ka)^{k-1},$$

D'où le résultat.

Il faut tout de même être prudent sur le sens du terme de la somme correspondant à $k = n$, si $ka + y = 0$ (par exemple si $a = -1$ et $y = n$: on ne devrait pas avoir $(na+y)^0 = 0$ dans ce cas), au risque d'avoir des absurdités dans lesquelles on tombe facilement dans la question **Q30.**. En prévision de cette question, je donne une variante qui isole le terme problématique :

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (ka+y)^{n-k}(-ka)^{k-1} + (-na)^{n-1}. \tag{4}$$

III.B - *Développement en série entière de la fonction W*

On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ en posant,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

On définit, lorsque c'est possible, $\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$

Q 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$.

Correction : Nous allons appliquer la règle de D'Alembert. Soit $x \in \mathbb{C}$. Si $x = 0$ alors la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ converge évidemment. Supposons donc $x \neq 0$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot |x| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot |x|.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, et l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ implique :

$$(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)\times\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle en 1, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = e^1\cdot|x|.$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, si $|x|<\frac{1}{e}$ la série $\sum_{n\geqslant 1} a_nx^n$ converge absolument , et si $|x|>\frac{1}{e}$ elle diverge grossièrement. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_nx^n$ est $R=\frac{1}{e}$.

Q 28. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Correction : La fonction $S : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R=\frac{1}{e}$, et on a :

$$S(0)=0,\qquad \text{et :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad S^{(n)}(0)=n!a_n=n!\times\frac{(-n)^{n-1}}{n!}=(-n)^{n-1}.$$

Q 29. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R,R]$.

Correction : Nous allons démontrer simultanément la définition et la continuité sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$, en montrant que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(x\mapsto a_nx^n)$ converge normalement (donc uniformément) sur cet intervalle. Posons : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x\in\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$, $f_n(x)=a_nx^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ on a bien sûr : $|f_n(x)|\leqslant|a_n|\left(\frac{1}{e}\right)^n$, et cette majoration est indépendante de x. Donc, par propriété de la borne supérieure : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\|f_n\|_\infty\leqslant\frac{|a_n|}{e^n}$.

Il reste à montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{e^n}$ converge pour obtenir ce qu'on veut. Nous pouvons obtenir un équivalent asymptotique du terme général grâce à la formule de Stirling, que nous rappelons :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a alors, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{|a_n|}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{n^{3/2}}>0.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est d'exposant $3/2>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{e^n}$ converge, et toujours par ce même théorème on en déduit la convergence normale (et donc uniforme) sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Comme f_n est continue sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$, on en déduit que S est définie et continue sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ en tant que limite uniforme de fonctions continues.

Q 30. Démontrer que,

$$\forall x\in]-R,R[,\quad x(1+S(x))S'(x)=S(x)$$

On pourra utiliser le résultat de la question 26.

Correction : Par commodité, posons $a_0 = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad 1 + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme $x \mapsto 1 + S(x)$ et $x \mapsto xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ sont des sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{e}$, leur produit de Cauchy converge absolument sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, et :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{5}$$

où, par définition d'un produit de Cauchy, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k) a_{n-k} &= n a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \cdot (n-k) \frac{(-n+k)^{n-k-1}}{(n-k)!} \\ &= n a_n + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k}. \end{aligned}$$

Grâce au théorème binomial d'Abel démontré à la question **Q26.**, nous pouvons simplifier cette somme. Pour $n = 0$ elle vaut trivialement 0. Si $n \geqslant 1$ alors on pose $a = 1$ et $y = -n$ dans (**??**) et on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n(-n)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-k)^{k-1} (-n+k)^{n-k} + (-n)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} + (-n)^{n-1}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} = (n-1)(-n)^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad c_n = n a_n - \frac{(n-1)(-n)^{n-1}}{n!} = n a_n - (n-1) a_n = a_n,$$

donc finalement l'égalité (**??**) devient :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x)\,\mathrm{e}^{S(x)} \end{array} \right.$

Q 31. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Correction : Comme S est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, c'est aussi le cas de h par produit et composition de fonctions de classe C^∞, et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad h'(x) = S'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)} = (1 + S(x))S'(x)e^{S(x)}. \tag{6}$$

En multipliant cette égalité par x, et en utilisant l'égalité $(1 + S(x))xS'(x) = S(x)$ démontrée dans la question précédente, on en déduit :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad xh'(x) = S(x)e^{S(x)} = h(x),$$

donc h est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad xy'(x) - y(x) = 0. \tag{7}$$

Q 32. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$, puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Correction : Posons $I = \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ ou $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Comme $x \neq 0$ pour tout $x \in I$, l'équation différentielle ci-dessus équivaut à : $\forall x \in I,\ y'(x) = \frac{1}{x}y(x)$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est le logarithme ; la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre implique donc que les solutions sur I sont de la forme :

$$y : x \mapsto \alpha e^{\ln(|x|)} = \alpha|x|.$$

Quitte à changer α en $-\alpha$, on en déduit que sur les deux intervalles possibles, les solutions sont de la forme $x \mapsto \alpha x$.

À présent, soit y une application dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ et qui soit solution de (**??**) sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$. En particulier, par restriction, cela définit une solution de (**??**) sur $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ et $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Donc, d'après ce qui précède, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[,\ y(x) = \alpha x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[,\ y(x) = \beta x.$$

Par continuité de y en 0, on doit avoir $y(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0$. De plus y est dérivable en 0, ce qui impose : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0}$, c'est-à-dire : $\beta = \alpha$.

De cela on déduit finalement que si y est une solution de (**??**) sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, alors y est de la forme $x \mapsto \alpha x$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproquement, cette application est bien une solution de (**??**), d'où le résultat.

Q 33. En déduire que,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = W(x)$$

Correction : Nous avons montré que $h : x \mapsto S(x)e^{S(x)}$ est solution de (**??**). Donc, d'après la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad h(x) = \alpha x.$$

Pour déterminer α, on note qu'en utilisant la dérivée calculée en (**??**), on trouve : $h'(0) = (1+S(0))S'(0)e^{S(0)} = 1$ (en effet $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$ d'après la question **Q28**). On a aussi $h' = \alpha$, donc $\alpha = 1$. Ainsi :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad S(x)e^{S(x)} = x.$$

Cette égalité peut se réécrire :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad f(S(x)) = x. \tag{8}$$

Or, si $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$, l'équation $f(t) = x$ a une solution $t \in [-1, +\infty[$, à savoir $W(x)$, et éventuellement une solution supplémentaire $t \in]-\infty, -1]$ si $x < 0$, à savoir $V(x)$. Pour exclure la possibilité que $S(x)$ soit égal à cette seconde solution si $x < 0$, il suffit de montrer que $S(x) > -1$. Pour cela, on note que l'égalité (**??**) donne, quand $x \to -\dfrac{1}{e}$ (et parce que S est continue en $-\dfrac{1}{e}$ d'après la question **Q29**) : $f\left(S\left(-\dfrac{1}{e}\right)\right) = -\dfrac{1}{e}$. Comme -1 est l'unique solution réelle à l'équation $f(t) = -\dfrac{1}{e}$ (voir question **Q9**), on en déduit : $S\left(-\dfrac{1}{e}\right) = -1$. Alors, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$ on a :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!}(-x)^n > \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n,$$

c'est-à-dire : $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right]$, $S(x) > S\left(-\dfrac{1}{e}\right) = -1$, ce qu'on voulait démontrer.

En conclusion, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$, $S(x)$ est une solution de l'équation $f(t) = x$ d'inconnue $t \geqslant 1$, et l'étude de la question **Q9** démontre que cette équation n'admet qu'une seule solution strictement supérieure à 1, qui est $W(x)$ (aussi bien pour $x < 0$ et $x \geqslant 0$). Donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad W(x) = S(x).$$

Q 34. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?

Correction : Les applications S et W sont continues sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$: nous l'avons démontré dans la question **Q29** pour S et dans la question **Q2** pour W. Par conséquent, leurs limites en $\pm\frac{1}{e}$ égalent leurs valeurs en $\pm\frac{1}{e}$. Prendre la limite quand $x \to \pm\frac{1}{e}$ dans l'égalité de la question précédente permet donc de démontrer qu'elle reste valable si $x = \pm\frac{1}{e}$. On en déduit que la réponse à la question posée est affirmative, et on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad W(x) = S(x).$$

Pour $x = -\frac{1}{e}$, on en déduit par ailleurs la jolie identité (non demandée) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} = 1.$$

IV - Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie **I**.
Pour tout réel positif x, on considère la fonction Φ_x définie par

$$\Phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}_+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \Phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de Φ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\Phi_x(t) = t$.

Correction : Soit $x \geqslant 0$. On a :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-xe^{-W(x)}}.$$

Or on sait que $W(x)e^{W(x)} = x$, donc $W(x) = xe^{-W(x)}$. On en déduit :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-W(x)} = W(x),$$

donc $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x : ce qu'il fallait démontrer.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction Φ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \Phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$$

Correction : Soit $x \geqslant 0$. Si $x = 0$ alors le résultat à démontrer est évident : supposons $x > 0$. L'application exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc par composition ϕ_x l'est aussi, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_x'(t) = x \cdot (xe^{-t})e^{-xe^{-t}} = x^2e^{-t-xe^{-t}}.$$

De là il est évident que $\phi_x'(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; majorons $e^{-t-xe^{-t}}$ en étudiant les variations de $g_x : t \mapsto -t - xe^{-t}$, clairement dérivable et de dérivée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_x'(t) = -1 + xe^{-t}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g_x'(t) > 0$ si et seulement si $e^{-t} > \frac{1}{x}$, si et seulement si $t < -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. De même pour le cas d'égalité. On en déduit le tableau de variations suivant :

Comme $g_x(\ln(x)) = -\ln(x) - xe^{-\ln(x)} = -\ln(x) - 1$, on en déduit $g_x(t) \leqslant -\ln(x) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_x'(t) = x^2 e^{g_x(t)} \leqslant x^2 e^{-\ln(x)-1} = x^2 \times \frac{1}{xe} = \frac{x}{e}.$$

En conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{e}.$$

Q 37. En déduire que

$$\forall\, x \in [0, \mathrm{e}], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|$$

Correction : Soient $x \in [0, e]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| \overset{\textbf{[Q35]}}{=} |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))|\,.$$

Or ϕ_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $|\phi_x'| \leqslant \frac{x}{e}$ d'après la question précédente. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| = |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leqslant \frac{x}{e}|w_n(x) - W(x)|.$$

Ceci vaut pour tout $x \in [0, e]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, par une récurrence facile, on obtient :

$$\forall x \in [0, e],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n |w_0(x) - W(x)|, \tag{9}$$

et par définition on a $w_0(x) = 1$: d'où le résultat.

Q 38. Pour tout réel $a \in]0, \mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.

Correction : Soit $a \in]0, e[$. L'application $1 - W$ est bornée sur $[0, a]$ en tant qu'application continue sur un segment (le majorant est facile à expliciter mais ce n'est pas important pour ce qui suit). L'inégalité de la question précédente implique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty.$$

Cette majoration est indépendante de x. Donc, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|w_n - W\|_\infty \leqslant \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty.$$

Comme $\frac{a}{e} \in]0, 1[$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^n = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|w_n - W\|_\infty = 0$. Ceci démontre que la suite de fonctions $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers W : d'où le résultat.

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, e]$?

Correction : La réponse est positive. Nous allons démontrer la version « epsilonesque » de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme W est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **Q2**, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [e - \eta, e], \quad |W(x) - W(e)| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $a = e - \eta$. On a $W(e) = 1$ donc, d'après (**??**) et l'inégalité ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leqslant |1 - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Sur $[0, a]$, nous savons que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers W. Donc, par définition (rappelée en (**??**)), il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0, a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

En combinant cette inégalité et celle sur $[a, e]$, on a donc l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\forall x \in [0, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, e]$ vers W : d'où le résultat.