

Devoir maison n°05

MP Clemenceau 2024-25

Pour le samedi 18 janvier 2025

Théorème d'Abel pour les séries entières

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable x ait pour rayon de convergence 1.

On note f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- $(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
- $(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

A) Généralités :

- 1) En utilisant des développements en séries entières usuels, donner dans chaque cas suivant, un exemple de suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :
 - a) (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
 - b) (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$.
 - c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$.
 - d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$.
- 2) On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer alors que la fonction admet une limite finie à gauche en 1 et préciser cette limite.

B) Théorème d'Abel

- 3) On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.
On va montrer qu'alors f admet une limite finie en 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).
On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$
 - a) Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.
 - b) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.
 - c) Soit $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que, pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.
 - d) Conclure.
- 4) Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?
- 5) *Application*
 - a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?
On pourra examiner le cas du produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ par elle-même.

b) Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose, pour tout entier n , $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n, \sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

C) Réciproque du théorème d'Abel

6) Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition $(\mathcal{Q})$ à la condition $(\mathcal{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$ alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

7) On prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n , $a_n \geq 0$.

Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$ alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.