Correction : Devoir maison n°5

MP Clemenceau 2022-23

pour le mardi 10 janvier 2022

Exercice

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\,\mathrm{e}^{-2nx}$.

1) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$?

Correction : Rappel : pour $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Pour tout entier non nul n les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-2nx}$ sont continues et intégrables sur $[0, +\infty[$, on en déduit que f_n est intégrable sur I.
Soit n un entier non nul :

$$\int_I f_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} - 2\,\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{n}\,\mathrm{e}^{-nx} - \frac{-1}{n}\,\mathrm{e}^{-2nx}\right]_0^{+\infty} = 0$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$.

2) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$?

Correction : Pour $x \in I$, $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$ et $0 < \mathrm{e}^{-2x} < 1$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-nx}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-2nx}$ sont deux séries géométriques convergentes. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I et sa somme est :

$$\forall x \in I \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{(1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + \mathrm{e}^{-x})}$$

d'où

$$\forall x \in I \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{(1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{(1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$$

La fonction $S : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$. Elle est donc intégrable sur I.

$$\int_I S = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^{+\infty} = \ln(2)$$

3) Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$.

Correction : les fonctions f_n sont continues et intégrables sur I, la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue et intégrable sur I. Cependant $\displaystyle\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I f_n$, par contraposée du théorème d'intégration terme à terme on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$ diverge.

Problème

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1) On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : C'est un résultat de cours que $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (elle est bien sûr continue et positive sur cet intervalle), et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1,$$

donc g est une densité sur $[0,+\infty[$.

Nous allons à présent montrer à la fois l'existence des moments d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et les calculer, grâce à une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la proposition :

$$\ll x \mapsto x^n g(x) \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[, \text{ et on a : } m_n(g) = n!. \gg$$

Nous venons de justifier P_0. Montrons l'hérédité de la proposition : soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. Pour tout $t \geqslant 0$, l'application $x \mapsto x^{n+1}g(x)$ est continue sur le segment $[0,t]$, en tant que produit d'une application polynomiale et de g ; on intègre par parties, en intégrant g (qui est continue sur $[0,t]$ et de primitive $x \mapsto -e^{-x}$) et en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$ (qui est de classe C^1 sur $[0,t]$ et de dérivée de $x \mapsto (n+1)x^n$). On a alors :

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0, \quad \int_0^t x^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^t - \int_0^t (n+1)x^n(-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\ &= -t^{n+1}e^{-t} + (n+1)\int_0^t x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2}$$

On a, par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+1}e^{-t} = 0$. Par hypothèse de récurrence, $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ existe et est finie, et cette limite est $m_n(g) = n!$. Donc, quand $t \to +\infty$, la relation (2) implique d'une part que $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t x^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie, donc $x \mapsto x^{n+1}g(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et d'autre part que :

$$m_{n+1}(g) = (n+1)n! = (n+1)!,$$

d'où P_{n+1}.

Ayant l'initialisation et l'hérédité, par récurrence nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le moment d'ordre n de g est fini, et on a :

$$m_n(g) = n!.$$

2) Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto |x|^n \varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de $+\infty$ on a par croissances comparées :

$$|x|^n \varphi(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue et intégrable au voisinage de $+\infty$ car $2 > 1$, donc l'application $x \mapsto x^n \varphi(x)$ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison des fonctions intégrables.

De plus l'application $x \mapsto |x|^n \varphi(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$, donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x|^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |x|^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, comme on le voit en faisant le changement de variable $x \mapsto -x$. La seconde converge d'après ce qui précède, donc la première converge également.

Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x|^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |x|^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ convergent, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge et donc l'application $x \mapsto x^n \varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que φ admet des moments d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

Correction : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'entier $2p+1$ est impair, donc $x \mapsto x^{2p+1}$ est une fonction impaire. De plus φ est paire, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$ leur produit $x \mapsto x^{2p+1}\varphi(x)$ est une fonction impaire. On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

4) Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

Correction : Je présume, pour traiter cette question, qu'on admet que φ est effectivement une densité sur $\mathbb{R}$, et donc que $m_0(\varphi) = 1$.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$m_{2p}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^{2p-1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Nous allons intégrer par parties. Soit $t \geqslant 0$. L'application $x \mapsto x^{2p-1}$ est de classe C^1 sur $[0, t]$, de dérivée $x \mapsto (2p-1)x^{2p-2}$; l'application $x \mapsto -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0, t]$, et admet pour primitive $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. On dérive la première et intègre la seconde, et la formule de l'intégration par parties donne :

$$\int_0^t x^{2p-1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\mathrm{d}x = \left[x^{2p-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^t - (2p-1)\int_0^t x^{2p-2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = t^{2p-1}e^{-\frac{t^2}{2}} - (2p-1)\int_0^t x^{2p-2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

On a, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{2p-1}e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$. Donc, quand $t \to +\infty$, la relation (3) donne :

$$m_{2p}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times (2p-1)\int_0^{+\infty} x^{2p-2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = (2p-1)m_{2p-2}(\varphi). \tag{4}$$

Ainsi la suite $(m_{2p}(\varphi))_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence. Nous allons montrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p}(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

Si $p = 0$, on l'a déjà établi, puisque $m_0(\varphi) = 1$ et $\dfrac{(2\cdot 0)!}{2^0 0!} = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait la relation $m_{2p}(\varphi) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$. Alors, en utilisant la relation de récurrence (4), on a :

$$m_{2(p+1)}(\varphi) = (2(p+1)-1)m_{2p}(\varphi) = (2p+1)\frac{(2p)!}{2^p p!} = \frac{(2p+2)}{2(p+1)}(2p+1)\frac{(2p)!}{2^p p!} = \frac{(2(p+1))!}{2^{p+1}(p+1)!},$$

d'où l'égalité au rang $p+1$.

Nous avons démontré l'initialisation et l'hérédité, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p}(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

5) Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Correction : Prenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4x^2} & \text{si } |x| \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, intégrable au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ grâce à l'intégrabilité de la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}\right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Tout ceci démontre que f est bien une densité sur $\mathbb{R}$. Par contre, pour tout x au voisinage de $+\infty$ on a : $x \cdot f(x) = \frac{1}{4x}$, et la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$: ainsi f n'admet pas de moment d'ordre 1.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III), mais faux si $I = [0, +\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Correction : Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En prenant $y = 1-x$ dans la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 = (x + (1-x))^n = 1^n = 1,$$

d'où le résultat.

7) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

Correction : Pour $n = 0$ on vérifie immédiatement que l'égalité de l'énoncé est vérifiée. Prenons donc $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (cette distinction de cas est seulement pour ne pas avoir à se soucier d'élever 0 à une puissance négative dans l'égalité ci-dessous, mais c'est en soi dispensable).

En dérivant la formule du binôme $(x+y)^n$ par rapport à x puis en multipliant le résultat par x, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}. \tag{5}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, prendre $y = 1-x$ donne donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(x + (1-x))^{n-1} = nx \cdot 1^n = nx,$$

d'où le résultat.

8) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

Correction : Pour $n = 0$ et $n = 1$, la vérification immédiate ne pose pas de problème. Prenons donc un entier $n \geqslant 2$. En dérivant (5) par rapport à x, et en multipliant le résultat par x, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, prendre $y = 1-x$ donne donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(x+(1-x))^{n-1} + n(n-1)x^2(x+(1-x))^{n-2} = nx + n(n-1)x^2,$$

d'où le résultat.

9) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

Correction : Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + (nx)^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

On simplifie cette expression grâce aux trois identités démontrées dans les questions précédentes. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(nx + n(n-1)x^2\big) - 2(nx)^2 + (nx)^2 = nx(1-x) \leqslant n,$$

où l'on utilise les majorations $x \leqslant 1$ et $1 - x \leqslant 1$, valables pour $x \in [0,1]$; d'où le résultat avec $C = 1$ (en vérité, le maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ est $\frac{1}{4}$, on peut donc prendre $C = \frac{1}{4}$).

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

10) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

Correction : Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Du fait que $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ d'après la question 6, on peut écrire :

$$\begin{aligned} B_n(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \\ &= \sum_{k\in X} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) + \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right). \end{aligned}$$

D'après la propriété admise dans l'énoncé, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ vérifiant $|x-y| < \alpha$, on ait : $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Or, par définition de X, pour tout $k \in X$ on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha$. On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k\in X} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| + \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k\in X} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|. \end{aligned}$$

Comme nous sommons des termes positifs et que $X \subset [\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{k\in X} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1.$$

De plus, pour tout $k \in Y$ on a :

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

On en déduit :

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \tag{7}$$

d'où le résultat.

11) En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

Correction : Soit $x \in [0,1]$. Par définition de Y :

$$\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k\in Y} \frac{\left|x - \frac{k}{n}\right|^2}{\left|x - \frac{k}{n}\right|^2} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k\in Y} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

D'après la question 9, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

et donc :

$$\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{C}{\alpha^2 n}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C}{\alpha^2 n} = 0$. Donc, par définition de la limite, pour tout n suffisamment grand on a :

$$0 \leqslant \frac{C}{\alpha^2 n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}.$$

En utilisant cette majoration, et la relation (7), on obtient finalement que pour tout n suffisamment grand :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} = 2\varepsilon,$$

ce qu'on voulait démontrer.

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I=[0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12) Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Correction : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))x^n\,\mathrm{d}x = m_n(f) - m_n(g) = 0$$

par hypothèse sur f et g. Or toute fonction polynomiale s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions puissances $x \mapsto x^n$, et l'intégrale est une forme linéaire, donc pour toute fonction polynomiale P on a également :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f-g$ sur $[0,1]$.

13) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 (f(x)-g(x))(P_n(x)-(f(x)-g(x)))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |f(x)-g(x)|\cdot|P_n(x)-(f(x)-g(x))|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|P_n-(f-g)\|_\infty \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par hypothèse $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f-g$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n-(f-g)\|_\infty = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

14) Montrer alors que $f=g$ sur $[0,1]$.

Correction : D'après la question 12, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Mais d'après la question précédente, la limite de cette suite d'intégrales est $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x$. Par unicité de la limite :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $(f-g)^2$ est continue sur $[0,1]$ parce que f et g sont des densités, positive, et d'intégrale nulle : cela n'est possible que si $(f-g)^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$f = g,$$

d'où le résultat.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t)\, \mathrm{d}t,$$

où φ est définie en (1).

15) Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Correction : Nous allons démontrer simultanément l'existence et la continuité de $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$, grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre. Posons :

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \phi(\xi, t) = \mathrm{e}^{it\xi}\, \varphi(t).$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ (par continuité de φ, et par continuité de l'exponentielle complexe en tant que somme de série entière de rayon de convergence infini par exemple), et pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour la même raison. De plus :

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |\phi(\xi, t)| = \varphi(t) \leqslant \varphi(t), \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

et l'application φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit d'une densité sur $\mathbb{R}$.

Les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont donc vérifiées ; on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi, t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, et l'application $\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$: ce qu'il fallait démontrer.

16) Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Correction : Cette fois-ci, nous utilisons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Avec les notations de la question précédente :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est manifestement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) = it\, \mathrm{e}^{it\xi}\, \varphi(t);$$

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto \phi(\xi, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t)$ sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ par continuité des exponentielles et applications polynomiales, et l'application $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente ;
- pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) \right| = t\varphi(t), \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

  et l'application $t \mapsto t\varphi(t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2 (où nous montrions en particulier l'existence d'un moment d'ordre 1).

Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont donc vérifiées ; on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et l'application $\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} it\, \mathrm{e}^{it\xi}\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\, te^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

17) Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

Correction : Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Nous allons intégrer par parties. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{it\xi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, de dérivée $t \mapsto i\xi\, \mathrm{e}^{it\xi}$; l'application $t \mapsto t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $[a, b]$, et admet pour primitive $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. On dérive la première et intègre la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties on a donc :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{it\xi}\, t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{it\xi} \cdot \left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]_a^b + i\xi \int_a^b \mathrm{e}^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{ib\xi}\, \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}} + \mathrm{e}^{ia\xi}\, \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} + i\xi \int_a^b \mathrm{e}^{it\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

On a $\lim\limits_{b\to+\infty} \left|\mathrm{e}^{ib\xi}\, \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}}\right| = \lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}} = 0$, et de même : $\lim\limits_{a\to-\infty} \left|\mathrm{e}^{ia\xi}\, \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right| = 0$. Donc, quand $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\, t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = i\xi \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Après multiplication par $\frac{i}{\sqrt{2\pi}}$, on obtient :

$$\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\varphi(\xi),$$

donc $\widehat{\varphi}$ vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $y'(\xi) = -\xi y(\xi)$.

18) Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

Correction : Une primitive de $\xi \mapsto -\xi$ est $\xi \mapsto -\frac{\xi^2}{2}$, donc la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre nous assure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Pour déterminer la valeur de cette constante, nous devons déterminer $\widehat{\varphi}$ en un réel. Or :

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

parce que φ est une densité sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\lambda = 1$, et donc :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

V – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

19) Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x))\, \mathrm{d}x.$$

Correction : L'application f est positive sur $[0, +\infty[$. Vérifions qu'elle est continue sur ce même intervalle. Tout d'abord :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}}{x\sqrt{2\pi}} = \lim_{u\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-u}}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

par composition de limites, étant donné que : $\lim\limits_{u\to-\infty} \left(-\frac{u^2}{2} - u\right) = -\infty$. Or $f(0) = 0$, donc f est bien continue en 0, et par suite sur $[0, +\infty[$ (la vérification est facile sur $]0, +\infty[$).

Il reste à justifier que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de masse 1. Pour cela, on note que si l'on fait le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ (c'est-à-dire : $x = \ln(u)$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}x$, changement de variable licite parce que l'application $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, alors $\mathrm{d}u = e^x\, \mathrm{d}x$, et la formule du changement de variable ne change pas la nature des intégrales, donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^x}{e^x}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\ln(u))^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}u}\, \mathrm{d}u$$

converge également, et on a bien :

$$\int_{\mathbb{R}_+} f = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\ln(u))^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}u}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

On a bien démontré que f est une densité sur $]0,+\infty[$.

20) Montrer que :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi-in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u\right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

Correction : Tout d'abord, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi-in)u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u$ converge : il s'agit de $\widehat{\varphi}(2\pi-in)$; la définition de $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ fut démontrée à la question 15, et l'énoncé nous incite à admettre que les résultats de la partie IV valent aussi sur $\mathbb{C}$ (voir l'énoncé de la question 18).

Ensuite :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi-in)u}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{2i\pi u}\,\mathrm{e}^{nu}\,e^{-\frac{1}{2}u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u)\,(\mathrm{e}^u)^n\,e^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u$$

En faisant le changement de variable $x = e^u$, licite d'après la question précédente (où l'on a simplement inversé les notations...), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u)\,(\mathrm{e}^u)^n\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \sin(2\pi\ln(x))x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \sin(2\pi\ln(x))x^n f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

intégrale égale à I_n par définition. On a donc montré :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi-in)u}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u\right).$$

21) À l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n = 0$.

Correction : D'après la question précédente et la définition de $\widehat{\varphi}$ (étendue à $\mathbb{C}$, comme le suggère l'énoncé à la fin de la question 18), on a : $I_n = \mathrm{Im}\left(\widehat{\varphi}(2\pi - in)\right)$. Donc, d'après la question 18 :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{(2\pi-in)^2}{2}}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{(2\pi)^2-n^2}{2}}\,e^{2\pi in}\right) = \mathrm{Im}\underbrace{\left(e^{-\frac{(2\pi)^2-n^2}{2}}\right)}_{\in\mathbb{R}} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1+\alpha\sin(2\pi\ln(x))) & \text{pour } x > 0,\\ 0 & \text{pour } x = 0.\end{cases}$$

22) Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Nous avons déjà établi que f est une densité. Vérifions pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application g_α est une densité aussi : elle est bien continue sur $[0,+\infty[$ indépendamment de la valeur de α (du moins, si on pose $g_\alpha(0) = 0$, comme l'énoncé l'a fait pour f : attention au problème de définition du logarithme en 0). Pour juger si elle est positive sur $[0,+\infty[$, notons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $e^{-\frac{1}{4}} \in [0,+\infty[$ et :

$$g_\alpha\left(e^{-\frac{1}{4}}\right) = f(e^{-\frac{1}{4}})\left(1+\alpha\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(e^{-\frac{1}{4}})\,(1-\alpha)\,.$$

Pour que cette quantité soit positive, il faut $\alpha \leqslant 1$. En faisant le même raisonnement avec $g_\alpha\left(e^{\frac{1}{4}}\right)$, on observe qu'il faut $\alpha \geqslant -1$. Réciproquement, pour tout réel $\alpha \in [-1,1]$ on a bien : $1+\alpha\sin \geqslant 0$, donc g_α est positive.

Alors, pour tout $\alpha \in [-1,1]$, on a $|g_\alpha| \leqslant 2|f|$ et f est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la question 19, donc par comparaison l'application g_α est intégrable sur $[0,+\infty[$. Enfin :

$$\forall \alpha \in [-1,1], \quad \int_0^{+\infty} g_\alpha = \int_0^{+\infty} f + \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\ln(x))\,\mathrm{d}x}_{=I_0=0} = \int_0^{+\infty} f = 1,$$

donc pour tout $\alpha \in [-1,1]$ la fonction g_α est une densité. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$m_n(g_\alpha) = m_n(f) + \alpha I_n,$$

et d'après la question précédente $I_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que pour tout $\alpha \in [-1,1]\setminus\{0\}$, les fonctions f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, clairement distinctes vu que $\sin \neq 0$, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n(g_\alpha) = m_n(f).$$

Or $[-1,1]\setminus\{0\}$ est indénombrable vu que $]0,1[$ l'est : cet intervalle est en effet en bijection avec $\mathbb{R}$ *via* l'application $\begin{cases} \mathbb{R} & \to &]0,1[\\ t & \mapsto & \frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2} \end{cases}$ par exemple, et $\mathbb{R}$ est indénombrable. D'où le résultat.

Remarque. En principe, aucune connaissance sur les ensembles indénombrables n'est au programme de PSI. Mais il ne me paraît pas raisonnable d'attendre des élèves qu'ils démontrent la non dénombrabilité de $[-1,1]\setminus\{0\}$ en ne partant d'aucun résultat standard et sans la moindre indication, d'autant que cette considération me semble les éloigner de la préoccupation du sujet. C'est pourquoi je me suis permis d'utiliser la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$, contre-exemple probablement nommé dans la plupart des cours sur les ensembles dénombrables.

Fin du problème