

# Devoir maison n°5

MP Clemenceau 2022-23

pour le mardi 10 janvier 2022

**Vous chercherez de préférence tout le sujet mais vous ne rendrez rédigés correctement que l'exercice et les questions : de 10) à 14) incluse du problème**

## Exercice

On note  $I = ]0, +\infty[$  et on définit pour  $n$  entier naturel non nul et pour  $x \in I$ ,  $f_n(x) = e^{-nx} - e^{-2nx}$ .

1) Justifier que pour tout entier naturel non nul  $n$ , les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $I$  et calculer  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

Que vaut alors la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$  ?

2) Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $I$ . Déterminer sa fonction somme  $S$  et

démontrer que  $S$  est intégrable sur  $I$ . Que vaut alors  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$  ?

3) Donner, sans aucun calcul, la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \right)$ .

## Problème

Dans tout le problème  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ , qui pourra être  $[0, 1]$  ou  $[0, +\infty[$  ou  $\mathbb{R}$ . On dira qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une densité (de probabilité) sur  $I$  si elle est **continue** et **positive** sur  $I$ , intégrable sur  $I$  et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x) dx = 1.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on dira que le moment d'ordre  $n$  d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre  $n$  par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x) dx.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1)$$

## I – Quelques exemples

1) On considère  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $g(x) = e^{-x}$ . Montrer que  $g$  est une densité sur  $[0, +\infty[$ , que tous ses moments sont finis et calculer  $m_n(g)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Montrer que tous les moments de la densité gaussienne  $\varphi$  sont finis.

3) Que vaut  $m_{2p+1}(\varphi)$  pour  $p \in \mathbb{N}$  ?

4) Calculer  $m_{2p}(\varphi)$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .

*On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.*

5) Donner un exemple de densité  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités  $f$  et  $g$  ont tous leurs moments finis et  
 $m_n(f) = m_n(g)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors  $f = g$  sur  $I$  ?

On va notamment voir que c'est vrai si  $I = [0, 1]$  (partie III), mais faux si  $I = [0, +\infty[$  (partie V) ou  $I = \mathbb{R}$ .

## II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que  $\binom{n}{k}$  désigne le coefficient binomial «  $k$  parmi  $n$  ».

6) Justifier que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9) En déduire que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq Cn,$$

pour une constante  $C > 0$  à préciser.

On se donne maintenant  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\varepsilon > 0$ . On admet l'existence de  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ ,

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour  $x \in [0, 1]$  on partitionne les entiers  $k$  naturels entre 0 et  $n$  en :

$$X = \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha \right\}.$$

10) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que  $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ .

11) En utilisant la définition de l'ensemble  $Y$  et les questions précédentes, conclure qu'il existe  $n$  suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur  $[0, 1]$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

### III – Le problème des moments sur $[0, 1]$

On considère ici deux densités  $f$  et  $g$  sur  $I = [0, 1]$  et on suppose donc que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12) Montrer que, pour toute fonction polynomiale  $P$ , on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))P(x) dx = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $f - g$  sur  $[0, 1]$ .

13) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x) dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx.$$

14) Montrer alors que  $f = g$  sur  $[0, 1]$ .

### IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt,$$

où  $\varphi$  est définie en (1).

15) Justifier que  $\hat{\varphi}$  est correctement définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

16) Justifier que  $\hat{\varphi}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

17) Montrer que  $\hat{\varphi}$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

18) Montrer que  $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout  $\xi \in \mathbb{C}$ .

### V – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

19) Montrer que  $f$  est bien une densité sur  $[0, +\infty[$ . On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) dx.$$

20) Montrer que :

$$I_n = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right),$$

où  $\operatorname{Im}(z)$  désigne la partie imaginaire du complexe  $z$ .

21) À l'aide de la partie IV, en déduire que  $I_n = 0$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

22) Déterminer une infinité non dénombrable de  $\alpha$  pour lesquels  $f$  et  $g_\alpha$  sont deux densités sur  $[0, +\infty[$ , distinctes et  $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

FIN DU PROBLÈME