Correction : Devoir maison n° 4

MP Clemenceau 2022-23

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et ℓ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^\ell$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|M\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Définitions : *Soit M une matrice dans $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j}$, pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell)$. On dit que M est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,\ell]\!] \quad m_{i,j} \geq 0 \text{ (resp } .m_{i,j} > 0 \text{)}$$

Pour deux matrices M et N de $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, on note $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Si $n = \ell$, une matrice M de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\} \\ B^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n / x > 0\} \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_1 = 1\} \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :
Théorème (Perron-Frobenius) *Soit T dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique vérifiant $(I_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}$$

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2.
Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie I) Un vecteur propre strictement positif

Soit T est un élément positif de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $P = (I_n + T)^{n-1}$. On suppose P strictement positive. On note $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1) Montrer que pour tout $x \in B$, l'ensemble $\Gamma_x = \left\{\theta \in \mathbb{R}^+/\theta x \leqslant Tx\right\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

Correction : Soit $x \in B$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, $(Tx)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j$, on en déduit que, comme x et T sont positifs, Tx l'est également.
On peut ensuite écrire, pour $\theta \geq 0$: $\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \theta x_i \leq (Tx)_i$

Toujours avec x et T positifs on obtient que $0 \in \Gamma_x$ car on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $0x_i \leqslant (Tx)_i$.
$\boxed{\Gamma_x \text{ est donc non vide.}}$

Comme x est non nul, il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$. Pour θ dans Γ_x on a alors : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}}$.

$\boxed{\Gamma_x \text{ est donc borné.}}$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note φ_i l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à θ associe $(Tx)_i - \theta x_i$.
Ces applications sont clairement continues (affines). De plus $\mathbb{R}^+$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et Γ_x peut s'écrire sous la forme $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}\left(\mathbb{R}^+\right)$, on en déduit que $\boxed{\Gamma_x \text{ est fermé.}}$

2) Montrer que pour tout $x \in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i}/1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$$

Correction : On pose $m = \min\left\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i}/1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$

On déduit de la démonstration précédente sur la majoration que, pour tout i tel que $x_i \neq 0$, $\dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ est un majorant de Γ_x. D'où $\theta(x) \leqslant m$.
De part sa définition on peut dire (et le vérifier) que $m \in \Gamma_x$ et donc, par définition, $\theta(x) = m$.

On note θ l'application de B dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tout α dans $\mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

Correction : Pour $\alpha > 0$ et $x \in B$, nous avons $x_i \neq 0$ si et seulement si $(\alpha x)_i \neq 0$, et pour un tel i, par linéarité de T, $\dfrac{(Tx)_i}{x_i} = \dfrac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i}$. La relation précédente donne donc $\boxed{\theta(x) = \theta(\alpha x)}$.

4) Montrer que $P(B) \subset B^+$.

Correction : Soit $x \in B$ et choisissons i_0 tel que $x_{i_0} > 0$.

Nous avons alors pour tout i dans $[\![1,n]\!]$: $(Px)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{p_{i,j}x_j}_{\geq 0} \geq p_{i,i_0}x_{i_0} > 0$, et donc $Px > 0$.

On a donc bien $\boxed{P(B) \subset B^+.}$

5) Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.

Correction : Soit $\theta \in \Gamma_x$. Par définition de P, comme T est positive, P est aussi positive. On en déduit que $\theta x \leq Tx$ donne $P(\theta x) \leq PTx$, c'est à dire $\theta Px \leq T(Px)$ puisque P et T commutent (P est un polynôme en T). On en déduit que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$, puis, par propriété du minimum, que $\boxed{\theta(x) \leq \theta(Px)}$.

Notons $y = Px$. Nous savons (question 4) que y est strictement positif. Si l'on avait $(Ty)_i = 0$, la i-ème ligne de T serait nulle (car T est positive). Les matrices T^j, pour $j \geq 1$, auraient alors également leur i-ème ligne nulle et $P = I_n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} T^j$ ne serait pas strictement positive.

On en déduit que Ty est strictement positif, puis que $\boxed{\theta(Px) > 0}$ d'après la question 2).

6) Soit $x \in B$ un vecteur propre de T. Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

Correction : Si $Tx = \lambda x$, alors $\lambda = \theta(x) > 0$ et $Px = (1 + \lambda)^{n-1}x$.
On en déduit que $\boxed{\theta(Px) = \theta(x)}$ d'après la question 3).

7) Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

Correction : Notons $\lambda = \theta(x)$ et supposons que x ne soit pas un vecteur propre pour T associé à λ. Le vecteur $y = Tx - \lambda x$ est alors élément de B. D'après la question 4), Py est élément de B^+, ce qui donne $\lambda(Px) < PTx = T(Px)$. Ainsi, pour tout i, nous avons (en remarquant que $Px > 0$), $\lambda < \dfrac{(T(Px))_i}{(Px)_i}$ et en particulier :

$$\theta(x) = \lambda < \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(T(Px))_i}{(Px)_i} = \theta(Px)$$

Nous avons donc démontré par contraposée la propriété demandée.

8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

Correction : Pour tout i, l'application $x \mapsto \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ est continue sur B^+ (c'est le quotient de deux formes linéaires). On en déduit que l'application $\phi\ :\ x \mapsto \min\limits_{1 \leq i \leq n} \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ est continue sur B^+ : comme $P(C) \subset P(B) \subset B^+$, la restriction de ϕ à $P(C)$ est donc continue, i.e. que θ est continue sur $P(C)$.

9) Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

Correction : $C = \Sigma \cap B = \Sigma \cap \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ (intersection d'un fermé borné et d'un fermé) : il est donc compact. L'application $x \mapsto Px$ étant continue, $P(C)$ est une partie compacte. L'application θ restreinte à ce compact non vide étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe en particulier x_0 dans $P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Montrer que $\sup\limits_{x \in P(C)} (\theta(x)) \geq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

Correction : Si $x \in C$, $Px \in P(C)$ et $\theta(x) \leq \theta(Px) \leq \sup\limits_{y \in P(C)} \theta(y)$.

On en déduit $\boxed{\sup\limits_{x \in P(C)} (\theta(x)) \geq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)}$.

11) Montrer que $\sup\limits_{x\in B}\theta(x) = \sup\limits_{x\in C}\theta(x)$.

Correction : Si $x \in B$,le vecteur $y = \dfrac{1}{\|x\|_1}x$ est élément de C et $\theta(x) = \theta(y)$ d'après 3). Ceci prouve que $\sup\limits_{x\in B}\theta(x) \leq \sup\limits_{x\in C}\theta(x)$. L'inégalité inverse est immédiate, puisque $C \subset B$, d'où $\boxed{\sup\limits_{x\in B}\theta(x) = \sup\limits_{x\in C}\theta(x)}$

12) Montrer que $\sup\limits_{x\in C}\theta(x) = \sup\limits_{x\in P(C)}\theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x\in C}\theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

Correction : Comme $P(C) \subset B^+ \subset B$, nous avons directement $\sup\limits_{x\in C}\theta(x) \leq \sup\limits_{x\in P(C)}\theta(x) \leq \sup\limits_{x\in B}\theta(x) = \sup\limits_{x\in C}\theta(x)$, soit :

$$\sup_{x\in C}\theta(x) = \sup_{x\in P(C)}\theta(x) = \theta(x_0).$$

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

Correction : Comme x_0 est élément de $P(C)$, il est élément de B^+ et est donc strictement positif.

Il existe $y_0 \in B$ tel que $x_0 = Py_0$; la question 5) donne alors $\theta_0 = \theta(Py_0) > 0$.

Enfin, $\theta(x_0) \leq \theta(Px_0) \leq \sup\limits_{x\in B}\theta(x) = \theta(x_0)$, donc $\theta(x_0) = \theta(Px_0)$ et, d'après la question 7), x_0 est un vecteur propre pour T associé à la valeur propre θ_0.

II) Une méthode d'approximation

On suppose toujours que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive et on suppose de plus que T est stochastique.

Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \dots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j.$$

14) Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ.

Montrer que $|\theta|\, x^+ \leqslant Tx^+$.

Correction : Pour tout i compris entre 1 et n, nous avons $\theta x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j$,

et donc $|\theta||x_i| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} t_{i,j}|x_j|$, ce qui donne $\boxed{|\theta|\, x^+ \leqslant Tx^+}$.

15) En déduire que $|\theta| \leqslant \theta_0$.

Correction : Comme $x^+ \in B$, $|\theta| \leq \theta(x^+) \leq \sup\limits_{y\in B}\theta(y) = \theta_0$.

16) Montrer que $|\theta|\,\|x^+\|_1 \leqslant \|x^+\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leqslant 1$.

Correction : On utilise le fait que T est stochastique. $|\theta|\,||x^+||_1 = ||\theta x||_1 = ||Tx||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j\right|$

On a de plus $\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} t_{i,j}|x_j|$ et $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} t_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_{i,j}}_{=1}\Bigg)|x_j| = ||x||_1 = ||x^+||_1$.

On en déduit que $\boxed{|\theta|\,\|x^+\|_1 \leqslant \|x^+\|_1}$ et par suite, x^+ étant non nul, $\boxed{|\theta| \leqslant 1}$

17) En déduire $\theta_0 = 1$.

Correction : Le vecteur $x = (1,1,\dots,1)$ est un vecteur propre pour ${}^tT$, associé à la valeur propre 1. On en déduit que 1 est également valeur propre de T (T et ${}^tT$ ont même polynôme caractéristique). La question 15) donne donc $1 \leq \theta_0$.

D'autre part, la question 13) prouve que θ_0 est une valeur propre de T : on a donc $\theta_0 \leq 1$ d'après la question 16).
Conclusion : $\boxed{\theta_0 = 1}$

18) Montrer que pour tout $j \geqslant 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

Correction : Les matrices T^j et R_j sont clairement positive. Ensuite, pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la condition : $(\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{1\leq i\leq n} m_{i,j} = 1)$ signifie que le vecteur $e = (1,\dots,1)$ est un vecteur propre pour ${}^tM$ associé à la valeur propre 1. Comme ${}^tTe = e$, on obtient ensuite directement, par récurrence sur j, que ${}^tT^je = e$, puis que ${}^tR_je = e$. Ceci achève de prouver que les matrice ${}^tT^j$ et ${}^tR_j$ sont stochastiques.

19) Établir, pour tout $k \geqslant 1$, les inégalités suivantes :

$$\left\|T^k\right\|_1 \leqslant 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leqslant 1.$$

Correction : Si M est une matrice stochastique, le calcul fait à la question 16) montre que $||Mx||_1 \leq ||x||_1$ pour tout vecteur x. On en déduit que $||M||_1 \leq 1$, et en particulier $||T^k||_1 \leq 1$ et $||R_k||_1 \leq 1$ pour tout $k \geq 1$.

20) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leqslant \dfrac{2}{k}$.

Correction : Pour $k \geq 1$, $TR_k - R_k = \dfrac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $||TR_k - R_k||_1 \leq \dfrac{1}{k}\left(||T^k||_1 + ||I_n||_1\right) \leq \dfrac{2}{k}$ (car $||I_n||_1 = 1$).

21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_kx)_{k\geqslant 1}$ a au moins une valeur d'adhérence.

Correction : Pour $x \in \mathbb{C}^n$, nous avons $||R_kx||_1 \leq ||R_k||_1\,||x||_1 \leq ||x||_1$ pour tout $k \geq 0$. La suite $(R_kx)_{k\geq 0}$ est donc une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, ||\ ||_1)$. Comme cet espace est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weïerstrass assure l'existence d'une valeur d'adhérence.

22) Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_kx)_{k\geqslant 1}$, montrer que $Ty = y$ et que pour tout $k \geqslant 1$, $R_ky = y$.

Correction : Il existe donc une application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $R_{\sigma(k)}x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. On en déduit que $TR_{\sigma(k)}x - R_{\sigma(k)}x$ tend vers $Ty - y$ quand k tend vers l'infini.

D'autre part, $||TR_{\sigma(k)}x - R_{\sigma(k)}x||_1 \leq ||TR_{\sigma(k)} - R_{\sigma(k)}||_1 \, ||x||_1 \leq \dfrac{2}{r}\sigma(k) \, ||x||_1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $Ty = y$, puis $T^j y = y$ pour tout $j \geq 0$, et enfin $R_k y = \dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j y = y$ pour tout $k \geq 1$.

23) Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x)_{k\geqslant 1}$, montrer pour tous les entiers m et ℓ, l'identité suivante :

$$y - z = R_\ell \left(R_m x - z\right) - R_m \left(R_\ell x - y\right)$$

Correction : Soient $m, l \geq 1$. Comme R_l et R_m commutent (ce sont deux polynômes en T), nous avons directement :

$$R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y) = R_l R_m x - R_l z - R_l R_m x + R_m y = y - z$$

24) Montrer que la suite $(R_k x)_{k\geqslant 1}$ a exactement une valeur d'adhérence.

Correction : Supposons comme à la question précédente que y et z sont deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)$. Il existe alors $\sigma, \sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissantes telles que $R_{\sigma(k)}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y$ et $R_{\sigma'(k)}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Nous avons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} ||y - z||_1 &= \left|\left|R_{\sigma(k)}(R_{\sigma'(k)}x - z) - R_{\sigma'(k)}(R_{\sigma(k)}x - y)\right|\right|_1 \\ &\leq \underbrace{||R_{\sigma(k)}||_1}_{\leq 1} ||R_{\sigma'(k)}x - z||_1 + \underbrace{||R_{\sigma'(k)}||_1}_{\leq 1} ||(R_{\sigma(k)}x - y)||_1 \\ &\leq ||R_{\sigma'(k)}x - z||_1 + ||R_{\sigma(k)}x - y||_1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $y = z$: la suite $(R_k x)$ possède donc une et une seule valeur d'adhérence.

25) Montrer qu'il existe une matrice R telle que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $Rx = \lim\limits_{k\to+\infty} R_k x$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.

Correction : On en déduit que pour tout x, la suite $(R_k x)$ est convergente (une suite d'un compact qui ne possède qu'une valeur d'adhérence est convergente). Notons donc f l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ qui à x associe $\lim\limits_{+\infty} R_k x$. f est clairement linéaire, puisque si $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $R_k(\lambda x + \mu y) = \lambda R_k(x) + \mu R_k(y)$ pour tout k, ce qui donne $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ quand k tend vers l'infini. En en déduit qu'il existe une matrice R telle que $\forall\, x \in \mathbb{C}^n$, $Rx = f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} R_k x$.

En choisissant pour x le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, nous en déduisons que la i-ème colonne de R_k converge vers la i-ème colonne de R. Ceci prouve que la suite (R_k) converge vers R "terme à terme", i.e. pour $||\ ||_\infty$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on en déduit que R_k tend également vers R au sens de la norme $||\ ||_1$ quand k tend vers l'infini.

Remarque : on peut évidemment se passer de l'équivalence des normes en remarquant que $||\ ||_1 \leq n||\ ||_\infty$.

26) Montrer que T et R commutent.

Correction : T commute avec chaque R_k, donc, par continuité du produit matriciel, T commute avec $R = \lim_{+\infty} R_k$.

27) Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.

Correction : En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité de la question 20), nous obtenons $||TR - R||_1 = 0$, soit $R = TR = RT$. On en déduit que $RT^j = R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, puis :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ RR_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} RT^j = R$$

ce qui donne enfin $R^2 = R$ en faisant tendre k vers l'infini.

28) Caractériser R en fonction de $\ker(T - I_n)$ et $\mathrm{Im}\,(T - I_n)$.

Correction : R est une projection : elle est donc caractérisée par ses espaces propres $\ker R$ et $\ker R - I_n = \mathrm{Im}\, R$.

Comme $(T - I_n)R = 0$, on a $\mathrm{Im}\, R \subset \ker T - I_n$. D'autre part, si $x \in \ker T - I_n$, $R_k(x) = x$ pour tout $k \geq 1$ et donc $R(x) = x$: ceci prouve que $x \in \mathrm{Im}\, R$, ce qui donne $\mathrm{Im}\, R = \ker T - I_n$.

Enfin, $R(T - I_n) = 0$ donne $\mathrm{Im}\, T - I_n \subset \ker R$. Par la formule du rang, nous avons :

$$\dim\ker R = n - \dim\mathrm{Im}\, R = n - \dim\ker T - I_n = \dim\mathrm{Im}\, T - I_n$$

et donc $\ker R = \mathrm{Im}\, T - I_n$.

Ceci prouve que R est la projection sur l'espace propre $\ker T - I_n$ parallèlement à l'espace $\mathrm{Im}\, T - I_n$ (ces deux sous-espaces étant en particulier supplémentaires).

29) On admet que $\ker(T - I_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.

Correction : Comme $\ker T - I_n$ est de dimension 1, il est engendré par le vecteur x_0. D'autre part, T étant stochastique, les vecteurs colonnes de la matrice $T - I_n$ sont contenus dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Comme $\mathrm{Im}\, T - I_n$ est un hyperplan, on en déduit que c'est exactement l'ensemble des vecteurs x vérifiant $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Un élément x de B s'écrit alors d'une unique façon sous la forme :

$$x = \lambda\, x_0 + y$$

avec $y_1 + \cdots + y_n = 0$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_0)_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_0)_i$. Comme les deux vecteurs x_0 et x sont élément de B, cela donne $\lambda = \frac{||x||_1}{||x_0||_1}$. Nous avons ainsi calculé le projeté de x sur $\mathrm{Im}\, R$ parallèlement à $\ker R$:

$$\forall\, x \in B,\ R(x) = ||x||_1\, \frac{x_0}{||x_0||_1}.$$

Ceci achève de démontrer le théorème de Perron-Froebenius : si y est élément de $\Sigma \cap B$, $||y||_1 = 1$ et l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j(y) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x_0}{||x_0||_1}$$

ce qui permet d'approximer le vecteur propre strictement positif unitaire associé à la valeur propre 1.

FIN DU PROBLÈME

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.