

Devoir maison n° 4

MP Clemenceau 2022-23

Vous devez rédiger au minimum la première partie pour le lundi 28 novembre 2022 à 19h



Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et ℓ colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . Un élément de $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans \mathbb{C}^n : par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de \mathbb{C}^n dont T est la matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^n . Si $M \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^\ell$, $(Mx)_i$ désigne la i -ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ et } \|M\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Définitions : Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j})$, pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell$. On dit que M est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket \quad m_{i,j} \geq 0 \text{ (resp. } m_{i,j} > 0 \text{)}$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, on note $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Si $n = \ell$, une matrice M de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$$

On définit les ensembles B , B^+ et Σ par :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\} \\ B^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n / x > 0\} \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_1 = 1\} \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème (Perron-Frobenius) Soit T dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique vérifiant $(I_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}$$

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2.

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie I) Un vecteur propre strictement positif

Soit T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $P = (I_n + T)^{n-1}$. On suppose P strictement positive. On note $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1) Montrer que pour tout $x \in B$, l'ensemble $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}^+ / \theta x \leq Tx\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

2) Montrer que pour tout $x \in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i} / 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\}$$

On note θ l'application de B dans \mathbb{R}_+ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tout α dans \mathbb{R}_+^* et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

4) Montrer que $P(B) \subset B^+$.

5) Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.

6) Soit $x \in B$ un vecteur propre de T . Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7) Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans \mathbb{R} .

9) Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Montrer que $\sup_{x \in P(C)} (\theta(x)) \geq \sup_{x \in C} \theta(x)$.

11) Montrer que $\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)$.

12) Montrer que $\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup_{x \in C} \theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

II) Une méthode d'approximation

On suppose toujours que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive et on suppose de plus que T est stochastique.

Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{C}^n , on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \dots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z . Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j.$$

- 14) Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ .
Montrer que $|\theta| x^+ \leq T x^+$.
- 15) En déduire que $|\theta| \leq \theta_0$.
- 16) Montrer que $|\theta| \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leq 1$.
- 17) En déduire $\theta_0 = 1$.
- 18) Montrer que pour tout $j \geq 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.
- 19) Établir, pour tout $k \geq 1$, les inégalités suivantes :
$$\|T^k\|_1 \leq 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leq 1.$$
- 20) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \frac{2}{k}$.
- 21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x)_{k \geq 1}$ a au moins une valeur d'adhérence.
- 22) Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k \geq 1}$, montrer que $Ty = y$ et que pour tout $k \geq 1$, $R_k y = y$.
- 23) Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x)_{k \geq 1}$, montrer pour tous les entiers m et ℓ , l'identité suivante :

$$y - z = R_\ell (R_m x - z) - R_m (R_\ell x - y)$$

- 24) Montrer que la suite $(R_k x)_{k \geq 1}$ a exactement une valeur d'adhérence.
- 25) Montrer qu'il existe une matrice R telle que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $Rx = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k x$
et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.
- 26) Montrer que T et R commutent.
- 27) Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.
- 28) Caractériser R en fonction de $\ker(T - I_n)$ et $\text{Im}(T - I_n)$.
- 29) On admet que $\ker(T - I_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0 .

FIN DU PROBLÈME

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.