

Correction : Devoir maison n°1

MP Clemenceau 2024-25

pour le samedi 12 octobre 2024 à 12h

Vous devez rédiger au minimum les questions :
1), 2), 5), 7)

Notations et objectifs

- Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel **positif**, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsqu'elle est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

- On se propose de prouver dans la partie A l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f .
- Puis on étudie dans les parties B et C le comportement de f aux voisinages de 0 et de 2.

Partie A — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1) Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

Correction : $\sin t \sim_0 t$, donc $\frac{\sin t}{t^\alpha} \sim_0 \frac{1}{t^{\alpha-1}}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, \pi]$, et l'intégrale de Riemann $\int_0^\pi \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha - 1 < 1$, donc, par équivalence des fonctions positives,

l'intégrale $I(\alpha)$ converge si, et seulement si $\alpha < 2$.

2) Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.

- (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.

Correction : Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$ et, pour tout $t \geq \pi$,

$$\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge, par comparaison des fonctions positives,

l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.

- (b) Déterminer, pour tout entier naturel k , la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$.

Correction : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t + \pi)| = |-\sin t| = |\sin t|$, ce qui signifie que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est π -périodique.

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $u \mapsto t = u + k\pi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ vers $[k\pi, (k+1)\pi]$.
Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi |\sin(u + k\pi)| du = \int_0^\pi \sin u du = [-\cos u]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$.

(c) Démontrer l'encadrement suivant, pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

Correction : Soit $\alpha \geq 0$ et $k \geq 1$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, pour tout $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha}$, et donc

$$\frac{|\sin t|}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt$,

Comme $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$, on obtient : $\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}$.

(d) Préciser pour quelles valeurs du réel α , l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

Correction : On somme pour $k = 1$ à $n - 1$ et on obtient :

$$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}, \text{ c'est-à-dire } \left[\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} \right].$$

- Si $\alpha \leq 1$, alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. La minoration précédente donne $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, ce qui prouve la divergence de l'intégrale $J(\alpha)$.
- Si $\alpha > 1$, alors l'intégrale $J(\alpha)$ converge absolument d'après la question 2a.

En conclusion, l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

3) Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.

(a) L'intégrale $J(0)$ est-elle convergente ?

Correction : Pour tout $x \geq \pi$, $\int_\pi^x \sin(t) dt = [-\cos t]_\pi^x = -\cos x - 1$ et cette quantité n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. Donc l'intégrale $J(0)$ est divergente.

(b) Prouver la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ si $\alpha > 0$.

Correction : Soit $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq \pi$, $\left| \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable, d'après Riemann, sur $[\pi, +\infty[$.

Donc, par comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ est absolument convergente.

Soit $x \geq \pi$. On procède à une intégration par parties en posant $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$.

Pour tout $t \geq \pi$, $|u(t)v(t)| = \left| \frac{\cos t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ et l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ converge.

Le théorème d'intégration par parties assure alors la convergence de l'intégrale $J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.

4) Domaine de définition de la fonction f .

En déduire le domaine de définition de la fonction f ainsi que le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant $f(\alpha)$.

Correction : L'intégrale $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent, c'est-à-dire si, et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 0$, i.e $\alpha \in]0, 2[$. Donc le domaine de définition de la fonction f est $]0, 2[$. L'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge absolument si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent absolument. Comme la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est positive sur $]0, \pi]$, l'intégrale $I(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si, elle est convergente. Donc l'intégrale $f(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$. Le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant $f(\alpha)$ est $]1, 2[$.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

Partie B — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose, dans cette partie, d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit, à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

5) On pose $K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, pour $\alpha \in]0, 1]$.

(a) Montrer que :

$$K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

Correction : On fait une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$.

Comme $u(t)v(t) = \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, puisque $2 - \alpha > 0$, et que $K(\alpha)$ est une intégrale convergente d'après la partie I, on peut intégrer par parties :

$$K(\alpha) = \left[\frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \right]_0^{\pi/2} + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{1 - 0}{(\pi/2)^\alpha} - 0 + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt$$

Donc $K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt$.

(b) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt + \int_1^{\pi/2} (1 - \cos(t)) dt$$

Correction :

- La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0, \pi/2]$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt \geq 0$.
- $\alpha + 1 \leq 2$ donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{t^2}$.
Comme, pour tout $t \in]0, 1]$, $1 - \cos t \geq 0$, $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$, par croissance de l'intégrale.
- $\alpha + 1 \geq 0$ donc, pour tout $t \in [1, \pi/2]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq 1$.
Comme, pour tout $t \in [1, \pi/2]$, $1 - \cos t \geq 0$, $\int_1^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_1^{\pi/2} (1 - \cos t) dt$, par croissance de l'intégrale.

D'autre part, la relation de Chasles donne $K(\alpha) = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt + \int_1^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt$, ce qui permet de conclure :

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt + \int_1^{\pi/2} (1 - \cos(t)) dt$$

(c) En déduire la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Correction : Notons M le majorant (indépendant de α) de l'encadrement précédent. Alors :

$$\forall \alpha \in]0, 1], \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \leq K(\alpha) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha M$$

Comme $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln(2/\pi)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} e^0 = 1$ et $\alpha M \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K(\alpha) = 1.$$

6) Limite de l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.

(a) Justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt$$

Correction : On pose $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. Comme u est bornée et $v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, on a $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui rend légitime une première intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = 0 - 0 - \alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt = -\alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$$

On pose à nouveau $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = -\frac{\alpha+1}{t^{\alpha+2}}$. Comme x est bornée et $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, on a $x(t)y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui légitime une seconde intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = -\alpha \left(0 - \frac{1}{(\pi/2)^{\alpha+1}} + (\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt \right)$$

On a obtenu : $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt}$.

(b) Déterminer la limite de $\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ quand α tend vers 0.

Correction :

- L'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent :

$$\left| \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt \right| \leq \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+2}} dt \leq \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}}$$

et le dernier membre est égal à $\alpha(\alpha+1) \left[-\frac{1}{(\alpha+1)t^{\alpha+1}} \right]_{\pi/2}^{+\infty} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}$. Comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0$, on

conclut, par le théorème d'encadrement, que $\boxed{\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0}$.

- D'après la question précédente, comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0$, on conclut que $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0}$.

(c) En déduire la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Correction : Par opérations, $\boxed{f(\alpha) \text{ admet une limite finie quand } \alpha \rightarrow 0 \text{ égale à } 1 + 0 = 1}$.

Partie C — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7) Une autre expression de la fonction f .

(a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

Correction : Soit $\alpha \in]0, 2[$. La fonction $h : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et :

- $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{2t^{\alpha-1}}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ d'après Riemann, puisque $\alpha - 1 < 1$.
- Pour tout $t \geq 1$, $h(t) \leq \frac{2}{t^{\alpha+1}}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après Riemann, puisque $\alpha + 1 > 1$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \text{ converge si } 0 < \alpha < 2}$.

(b) Etablir que, si $0 < \alpha < 2$:

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

Correction : Les fonctions $u : t \mapsto 1 - \cos t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec $u' : t \mapsto \sin t$ et $v' : t \mapsto -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ et :

- $u(t)v(t) = \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^\alpha} = \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, puisque $2 - \alpha > 0$.
- $t \mapsto 1 - \cos t$ est bornée, donc $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $\alpha > 0$.

Comme l'intégrale $f(\alpha)$ converge et que le produit uv admet des limites finies aux bornes de $]0, +\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$f(\alpha) = 0 - 0 + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt$$

On a obtenu : $\boxed{\text{pour } 0 < \alpha < 2, f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt}$.

(c) En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0, 2[$.

Correction : Comme la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0, +\infty[$ et $\alpha > 0$, par positivité de l'intégrale, f est positive sur $]0, 2[$. Si f s'annulait en $\alpha \in]0, 2[$, alors la fonction continue et positive $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}}$ serait d'intégrale nulle, donc identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Donc

$\boxed{f \text{ est à valeurs strictement positives sur }]0, 2[}$.

8) Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.

On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$.

(a) Montrer que φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On notera encore φ son prolongement.

Correction : La fonction φ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{elle est prolongeable en une fonction continue sur } \mathbb{R}}$, en posant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que la fonction φ admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliquer).

Correction : Pour tout $t \in]0, \pi]$, $\cos t < 1$, donc φ est strictement positive sur $]0, \pi]$ et, $\varphi(0) = \frac{1}{2} > 0$. Par conséquent φ est strictement positive sur $[0, \pi]$.

Etant continue sur le segment $[0, \pi]$, la fonction φ est bornée et atteint ses bornes sur $[0, \pi]$, donc $\boxed{\varphi \text{ admet sur } [0, \pi] \text{ un minimum } \mu > 0}$ car la fonction φ est strictement positive.

(c) Etablir les inégalités suivantes, pour $0 < \alpha < 2$:

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

Correction : Comme $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0, +\infty[$, d'après la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha-1}} dt \geq \alpha \mu \left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_0^\pi = \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

On a obtenu, pour $0 < \alpha < 2$, $\boxed{f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}}$.

(d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

Correction : $\alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \alpha \mu \frac{e^{(2-\alpha) \ln \pi}}{2-\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 2^-}{\sim} \frac{2\mu}{2-\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 2^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par minoration, $\boxed{f(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 2^-}{\longrightarrow} +\infty}$.