

Devoir maison n°1

MP Clemenceau 2024-25

pour le samedi 12 octobre 2024 à 12h

**Vous devez rédiger au minimum les questions :
1), 2), 5), 7)**

Notations et objectifs

- Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel **positif**, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsqu'elle est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

- On se propose de prouver dans la partie A l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f .
- Puis on étudie dans les parties B et C le comportement de f aux voisinages de 0 et de 2.

Partie A — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1) Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2) Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.

(a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.

(b) Déterminer, pour tout entier naturel k , la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$.

(c) Démontrer l'encadrement suivant, pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

(d) Préciser pour quelles valeurs du réel α , l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3) Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.

(a) L'intégrale $J(0)$ est-elle convergente ?

(b) Prouver la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ si $\alpha > 0$.

4) Domaine de définition de la fonction f .

En déduire le domaine de définition de la fonction f ainsi que le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant $f(\alpha)$.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

Partie B — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose, dans cette partie, d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit, à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

5) On pose $K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, pour $\alpha \in]0, 1]$.

(a) Montrer que :

$$K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

(b) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt + \int_1^{\pi/2} (1 - \cos(t)) dt$$

(c) En déduire la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

6) Limite de l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.

(a) Justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt$$

(b) Déterminer la limite de $\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ quand α tend vers 0.

(c) En déduire la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Partie C — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7) Une autre expression de la fonction f .

(a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

(b) Etablir que, si $0 < \alpha < 2$:

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

(c) En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0, 2[$.

8) Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.

On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$.

(a) Montrer que φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On notera encore φ son prolongement.

(b) Montrer que la fonction φ admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'explicitier).

(c) Etablir les inégalités suivantes, pour $0 < \alpha < 2$:

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

(d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.