

# Correction : du Devoir maison n°3

MP Clemenceau 2022-2023

Pour le lundi octobre 2022

**Les parties I, II sont indépendantes.**

**NOTATIONS :** Pour une suite réelle  $(u_k)_{k \geq 1}$  la notation  $\sup_{k \geq 1} (u_k)$  désigne  $+\infty$  si la suite  $(u_k)$  n'est pas majorée et la borne supérieure de  $\{u_k / k \geq 1\}$  si cette suite est majorée.

Pour deux entiers naturels  $p \leq q$ , on note  $\llbracket p, q \rrbracket$  l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à  $p$  et inférieurs ou égaux à  $q$ .

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels non nuls,  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

**PARTIE I :** Théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  normé complet (on admettra ce que cela veut dire en temps voulu). On notera  $B(x, r)$  [resp.  $\overline{B}(x, r)$ ] la boule ouverte [resp. fermée] de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$ .

On considère une suite  $(O_n)_{n \geq 1}$  d'ouverts de  $E$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ , l'adhérence  $\overline{O}_n$  de  $O_n$  est égale à  $E$  (ainsi  $O_n$  est dense dans  $E$ ).

1) (a) Soit  $G$  un ouvert non vide de  $E$ . Montrer que l'on peut trouver une suite décroissante de boules  $(B(x_n, \varepsilon_n))_{n \geq 1}$ , c'est à dire

$$B(x_1, \varepsilon_1) \supset B(x_2, \varepsilon_2) \supset \dots \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \dots$$

avec, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset G \cap \bigcap_{i=1}^n O_i.$$

**Correction :** on va construire la suite par récurrence.

$G$  est non vide on peut donc choisir un premier élément  $a \in G$ .  $G$  est un ouvert donc il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset G$ .  $O_1$  est dense dans  $E$  donc  $a \in \overline{O}_1$ . Par définition de l'adhérence on en déduit que  $B(a, r) \cap O_1 \neq \emptyset$ . Soit  $x_1 \in B(a, r) \cap O_1$ . Comme  $B(a, r)$  et  $O_1$  sont des ouverts,  $B(a, r) \cap O_1$  est un ouvert. Il existe donc  $r' > 0$  tel que  $B(x_1, r') \subset B(a, r) \cap O_1$ . Quitte à prendre  $\frac{r'}{2}$  on peut même dire que  $\overline{B}(x_1, r') \subset B(a, r) \cap O_1$ . On prend alors  $\varepsilon_1 = \min(r', \frac{1}{2})$  et on a bien  $0 < \varepsilon_1 < 1$  et  $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subset B(a, r) \cap O_1$ . Le résultat est vérifié pour  $n = 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose construit la suite de boules jusqu'au rang  $n$ .

On pose alors  $U = B(x_n, \varepsilon_n) \cap G \cap \bigcap_{i=1}^n O_i$ . C'est un ouvert comme intersection finie d'ouverts. Il contient  $x_n$ ,

car, par hypothèse de récurrence,  $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset G \cap \bigcap_{i=1}^n O_i$ . Par définition d'un ouvert, il existe donc  $r > 0$  tel que  $B(x_n, r) \subset U$ . Comme  $O_{n+1}$  est dense dans  $E$ , on a  $B(x_n, r) \cap O_{n+1} \neq \emptyset$ , d'où  $U \cap O_{n+1} \neq \emptyset$ .

Soit  $x_{n+1} \in U \cap O_{n+1}$ . Comme  $U \cap O_{n+1}$  est un ouvert comme intersection finie d'ouverts, il existe  $r' > 0$  tel que  $B(x_{n+1}, r') \subset U \cap O_{n+1}$ . On pose alors  $\varepsilon_{n+1} = \min(\frac{r'}{2}, \frac{1}{n+2})$  et on a  $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, r') \subset U \cap O_{n+1}$ , ainsi que  $0 < \varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ .

On a ainsi correctement défini la suite jusqu'au rang  $n + 1$ . Le principe de récurrence s'applique et on obtient donc l'existence de la suite.

(b) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est de Cauchy, c'est à dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n > n_0$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ .

**Correction :** Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n > n_0$ ,  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Comme on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $B(x_{n+p}, \varepsilon_{n+p}) \subset B(x_n, \varepsilon_n)$ , on obtient que

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon_n < \varepsilon.$$

La suite est donc bien une suite de Cauchy.

- (c) On admet qu'une suite de Cauchy est convergente dans un espace vectoriel complet (en fait c'est la définition d'un espace complet). Montrer que

$$G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \neq \emptyset.$$

**Correction :** La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant une suite de Cauchy dans un espace de Banach, c'est une suite convergente. On note  $\ell$  sa limite.

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\forall n > N, B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(x_N, \varepsilon_N) \subset \overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ . On en déduit que la suite  $(x_n)_{n > N}$  est convergente dans  $\overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$  car c'est un fermé. On en déduit que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ell \in \overline{B}(x_N, \varepsilon_N)$ . Or

$$\overline{B}(x_N, \varepsilon_N) \subset G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i.$$

D'où  $\ell \in G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i$  et donc  $G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \neq \emptyset$ .

- (d) Conclure que

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i} = E$$

**Correction :** On a toujours  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \subset E$ . Montrons l'inclusion inverse.

Soit  $x \in E$ , on considère  $G = B(x, r)$  avec  $r > 0$ .  $G$  est alors un ouvert non vide contenant  $x$ .

D'après les questions précédentes on a alors  $B(x, r) \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \neq \emptyset$ . Donc  $x \in \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i}$ , donc  $E \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i}$ , d'où le résultat.

- 2) On considère une suite  $(L_k)_{k \geq 1}$  de formes linéaires continues sur  $E$ .

On note  $\|L\|$  la norme d'une forme linéaire continue  $L$ , c'est-à-dire

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |L(x)|.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on note

$$V_n = \left\{ x \in E, \sup_{k \geq 1} |L_k(x)| > n \right\}$$

et

$$\Omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

- (a) Pour tout  $n \geq 1$ , montrer que  $V_n$  est un ouvert de  $E$ .

**Correction :** on a  $V_n = \left\{ x \in E; \sup_{k \geq 1} |L_k(x)| > n \right\}$ . On pose  $\alpha = \sup_{k \geq 1} |L_k(x)|$ , on a donc  $\alpha > n$ . Soit  $x \in V_n$ ,

pour  $\varepsilon = \frac{\alpha - n}{2}$  il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\alpha - \varepsilon \leq L_k(x) \leq \alpha$ . On a donc  $n < \frac{\alpha + n}{2} \leq L_k(x) \leq \alpha$ .

Comme  $L_k$  est continue  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall y \in B(x, \delta)$  on a  $|L_k(y) - L_k(x)| < \frac{L_k(x) - n}{2}$ . On a donc pour tout  $y \in B(x, \delta)$ ,  $n < \frac{n + L_k(x)}{2} < L_k(y) \leq \sup_{k \geq 1} L_k(y)$ . On en déduit que  $B(x, \delta) \subset V_n$ .

Conclusion :  $V_n$  est un ouvert.

- (b) Montrer que  $\Omega$  est dense dans  $E$  si et seulement si pour tout  $n \geq 1$ ,  $V_n$  est dense dans  $E$ .

**Correction :** Si  $\Omega$  est dense dans  $E$ , on a, par définition,  $\overline{\Omega} = E$ . Or, par définition de  $\Omega$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega \subset V_n$ , donc  $\overline{\Omega} \subset \overline{V_n}$ . On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E \in \overline{V_n}$ , c'est à dire  $E = \overline{V_n}$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n$  est dense dans  $E$ .

Réciproquement : on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n$  est dense dans  $E$ . Alors la famille  $(V_n)$  est une famille d'ouverts denses dans  $E$  et donc, d'après la première question,  $\Omega$  est dense dans  $E$ .

- (c) Prouver que si  $\Phi$  est une forme linéaire sur  $E$  qui reste bornée sur une boule de rayon  $\rho > 0$  et de centre  $z$  quelconque alors  $\Phi$  est continue et donner une majoration de sa norme.

**Correction :** Soit  $\Phi$  une forme linéaire. On suppose qu'il existe  $z \in E$  et  $\rho > 0$  tels que  $\Phi$  soit bornée sur  $B(z, \rho)$ . Soit  $M > 0$  tel que  $\forall y \in B(z, \rho)$ ,  $|\Phi(y)| \leq M$ .

Soit  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . On pose  $y = z + \frac{\rho}{2\|x\|}x$ . On a alors  $\|y - z\| = \frac{\rho}{2}$ , donc  $y \in B(z, \rho)$ . Donc on a  $|\Phi(y)| \leq M$ . On a alors par linéarité de  $\Phi$  et l'inégalité triangulaire (bis) :

$$\left| \frac{\rho}{2\|x\|} |\Phi(x)| - |\Phi(z)| \right| \leq \left| \frac{\rho}{2\|x\|} \Phi(x) + \Phi(z) \right| \leq |\Phi(y)| \leq M$$

On en déduit que

$$|\Phi(x)| \leq \frac{2\|x\|}{\rho} (|\Phi(z)| + M) \leq \frac{4M}{\rho} \|x\|$$

La forme linéaire  $\Phi$  est donc bien continue et sa norme subordonnée vérifie  $\|\Phi\| \leq \frac{4M}{\rho}$ .

- (d) On suppose que  $\Omega$  n'est pas dense dans  $E$ . Montrer alors qu'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\|L_k\| \leq M$ . Que vaut  $\Omega$  dans ce cas ?

**Correction :** Si on suppose que  $\Omega$  n'est pas dense dans  $E$  alors, par contraposée de la question 2b), il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $V_{n_0}$  n'est pas dense dans  $E$ . On a alors l'existence de  $z \in E \setminus V_{n_0}$  tel que il existe  $r > 0$  tel que  $B(z, r) \cap V_{n_0} = \emptyset$ .

On a donc  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall y \in B(z, r)$ ,  $|L_k(y)| \leq n_0$ .

On en déduit, d'après la question, que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|L_k\| \leq \frac{4n_0}{r}$ . En posant  $M = \frac{4n_0}{r}$  on a le résultat souhaité.

On suppose que  $\Omega \neq \emptyset$ .

Soit  $x \in \Omega$ , par définition de la norme subordonnée, on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $|L_k(x)| \leq \|L_k\| \|x\|$ .

Comme  $x \in \Omega$  on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sup_{k \in \mathbb{N}^*} |L_k(x)| > n$ .

On en déduit que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \leq M \|x\|$ . Ceci est impossible pour  $x$  fixé et  $M$  fixé. D'où  $\Omega = \emptyset$ .

**PARTIE II :** Permutation des termes d'une série.

- 1) Soit  $\sigma$  une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}^*$  et  $\sum v_n$  une série réelle absolument convergente. Montrer que la série  $\sum v_{\sigma(n)}$  converge.

**Correction :** Soit  $\sigma$  une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur lui-même. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $M \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma(\llbracket 1, N \rrbracket) \subset \llbracket 1, M \rrbracket$ .

On a alors  $\sum_{n=1}^N |v_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^M |v_n|$ .

Comme la série  $\sum v_n$  est absolument convergente on peut donc écrire :  $\sum_{n=1}^N |v_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|$ . la série positive  $\sum |v_{\sigma(n)}|$  est donc majorée. Elle est donc convergente.

Conclusion : la série  $\sum v_{\sigma(n)}$  est donc absolument convergente, donc convergente.

- 2) Soit  $\sum w_n$  une série réelle convergente telle que  $\sum |w_n|$  diverge.

(a) Pour  $x$  réel on note  $x^+ = \sup\{x, 0\}$  et  $x^- = \sup\{-x, 0\}$ . Exprimer  $x$  et  $|x|$  en fonction de  $x^+$  et  $x^-$ .

**Correction :** en distinguant les cas (par exemple) on arrive à  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$ .

(b) Quelles sont les natures des séries  $\sum w_n^+$  et  $\sum w_n^-$  ?

**Correction :** A l'aide des égalités précédentes on a, pour tout entier  $n$  non nul,  $w_n^+ = \frac{1}{2}(w_n + |w_n|)$  et  $w_n^- = \frac{1}{2}(|w_n| - w_n)$ .

Or la somme d'une convergente et d'une série divergente ne peut converger (se montre par l'absurde). On en déduit que les séries  $\sum w_n^+$  et  $\sum w_n^-$  sont divergentes.

(c) Montrer que l'on peut construire une bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}^*$  et deux applications strictement croissantes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$  telles que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} w_{\sigma(i)} \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\psi(n)} w_{\sigma(i)} \leq -1.$$

On proposera un algorithme permettant de proche en proche la détermination des valeurs de  $\sigma$  et la construction de  $\varphi$  et de  $\psi$ .

**Correction :** On commence par définir deux suites  $(u_n)$  et  $(u'_n)$  par :

$$\begin{cases} u_1 = w_{n_1}^+ \text{ tel que } n_1 = \min\{n/w_n^+ > 0\} \\ u_k = w_{n_k}^+ \text{ tel que } n_k = \min\{n/w_n^+ > 0 \text{ et } n_k > n_{k-1}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_1 = -w_{n_1}^- \text{ tel que } n_1 = \min\{n/w_n^- \leq 0 \text{ et } w_n^+ = 0\} \\ u'_k = -w_{n_k}^+ \text{ tel que } n_k = \min\{n/w_n^- \leq 0, w_n^+ = 0 \text{ et } n_k > n_{k-1}\} \end{cases}$$

Les suites ainsi construites contiennent respectivement les termes strictement positifs et les termes négatifs de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Du fait de la divergence des séries  $\sum w_n^+$  et  $\sum w_n^-$  on peut dire que ces deux suites sont correctement définies (un nombre fini de terme pour l'une ou l'autre entrainerait une somme finie et donc la convergence d'une des séries).

La série  $\sum w_n^+$  est divergente vers  $+\infty$  l'ensemble  $\left\{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=1}^n u_k \geq 1\right\}$  est non vide. On note  $\nu(1)$  son plus petit élément, et  $\varphi(1) = \nu(1)$ . On pose de plus, pour  $k \in [1, \varphi(1)]$ ,  $\sigma(k) = n_k$  tel que  $u_k = w_{n_k}^+$ . On a alors  $\sum_{k=1}^{\varphi(1)} w_{\sigma(k)} \geq 1$ .

La série  $\sum w_n^-$  est divergente vers  $+\infty$ , l'ensemble  $\left\{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=1}^n u'_k \leq -1 - \sum_{k=1}^{\varphi(1)} u_k\right\}$  est non vide. On note  $\eta(1)$  son plus petit élément.

On pose  $\psi(1) = \eta(1) + \varphi(1)$ , et, pour  $k \in [\varphi(1) + 1, \psi(1)]$ ,  $\sigma(k) = n_{k-\varphi(1)}$  tel que  $u'_{k-\varphi(1)} = -w_{n_{k-\varphi(1)}}^-$ . On a

$$\text{alors } \sum_{k=\varphi(1)+1}^{\psi(1)} w_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\eta(1)} u'_k.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{\psi(1)} w_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\varphi(1)} u_k + \sum_{k=1}^{\eta(1)} u'_k \leq -1$$

On construit alors les applications  $\varphi$ ,  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\eta$  et  $\sigma$  par récurrence, toujours en exploitant le fait que les séries  $\sum w_n^+$  et  $\sum w_n^-$  sont divergentes vers  $+\infty$  et donc, même en ne prenant un nombre fini de termes, les sommes partielles sont supérieurs à 1.

En supposant les applications construites jusqu'au rang  $N$  :

par construction :  $\varphi(N) < \psi(N)$  et  $\sigma$  est définie jusqu'à  $\psi(N)$ .

L'ensemble  $\left\{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=\nu(N)+1}^n u_k \geq 1 - \sum_{k=1}^{\psi(N)} w_{\sigma(k)}\right\}$  est non vide. On note  $\nu(N+1)$  son plus petit élément.

Puis  $\varphi(N+1) = \psi(N) + \nu(N+1) - \nu(N)$ .

Pour  $k \in [\psi(N) + 1, \varphi(N+1)]$ ,  $\sigma(k) = n_{k-\psi(N)+\nu(N)}$  tel que  $u_{k-\psi(N)+\nu(N)} = w_{n_{k-\psi(N)+\nu(N)}}^+$ .

L'ensemble  $\left\{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=\eta(N)+1}^n u'_k \leq -1 - \sum_{k=1}^{\varphi(N)} w_{\sigma(k)}\right\}$  est non vide. On note  $\eta(N+1)$  son plus petit élément.

Puis  $\psi(N+1) = \varphi(N+1) + \eta(N+1) - \eta(N)$ .

Pour  $k \in [\varphi(N+1) + 1, \psi(N+1)]$ ,  $\sigma(k) = n_{k-\varphi(N+1)+\eta(N)}$  tel que  $u_{k-\varphi(N+1)+\eta(N)} = -w_{n_{k-\varphi(N+1)+\eta(N)}}^-$ .

Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont, par construction, strictement croissantes. Les ensembles  $\{n \in \mathbb{N}^* / w_{\sigma(n)} \in \{u_k, k \in \mathbb{N}^*\}\}$  et  $\{n \in \mathbb{N}^* / w_{\sigma(n)} \in \{u'_k, k \in \mathbb{N}^*\}\}$  sont, par construction aussi, disjointes. On en déduit que  $\sigma$  est aussi par construction une bijection de  $\mathbb{N}^*$ .

(d) Que peut-on en déduire sur la nature de la série  $\sum w_{\sigma(n)}$  ?

**Correction :** les suites  $\left(\sum_{k=1}^{\varphi(n)} w_{\sigma(k)}\right)$  et  $\left(\sum_{k=1}^{\psi(n)} w_{\sigma(k)}\right)$  sont des suites extraites de la suite des sommes partielles

$\left(\sum_{k=1}^n w_{\sigma(k)}\right)$ . Si celle-ci converge vers un réel  $\ell$  alors les suites extraites aussi et on aurait  $\ell \geq 1$  et  $\ell \leq -1$ . Ce qui est impossible, donc la série diverge.

3) Dans cette question  $(F, \|\cdot\|_F)$  désigne un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie et  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $F$ . Montrer que  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge pour toute bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}^*$  si et seulement si la série  $\sum \|u_n\|_F$  converge.

**Correction : Remarque pour commencer :** attention le raisonnement de la question 2) n'a été fait qu'avec des séries réelles. Il n'est pas question de l'appliquer directement à une série vectorielle.

Cependant comme  $F$  est de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, aussi on utilisera la norme appropriée au raisonnement. En particulier on s'intéresse à une base  $(e_i)_{i \in [1, p]}$  de  $F$ .

On considère  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $F$  telle que la série  $\sum \|u_n\|_F$  converge.

Comme toutes les normes sont équivalentes on en déduit que la série  $\sum \|u_n\|_\infty$ , où  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme infinie associée à la base choisie, converge. Comme on a, pour  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ ,  $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ , les séries des coordonnées de  $(u_n)$  sont absolument convergentes. On peut alors appliquer la première question aux coordonnées et donc, par suite, pour toute bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge.

Réciproquement : on suppose que  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge pour toute bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}^*$ . On a en particulier, pour  $\sigma = Id_{\mathbb{N}^*}$ ,  $\sum u_n$  converge.

On en déduit que les séries coordonnées convergent. De plus, par contraposée du résultat de la question 2), on en déduit que les séries coordonnées sont absolument convergentes.

En considérant alors la norme 1 associée à la base :  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i|$ , on en déduit que la série  $\sum \|u_n\|_1$  est convergente.

- 4) On suppose dans cette question que  $F$  désigne l'espace  $l^2$  des suites réelles  $v = (v(k))_{k \geq 1}$  telles que  $\sum v(k)^2$  converge, muni de la norme

$$\|v\|_2 = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} v(k)^2 \right)^{1/2}.$$

On pose, pour tous  $n, k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{1}{n} & \text{si } k = n \end{cases}$$

- (a) Montrer que, pour toute bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}^*$ , la série  $\sum \omega_{\sigma(n)}$  converge dans  $F$ .

**Correction : bien faire attention :** on parle d'une série de suite.

Soit  $\sigma$  une bijection de  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , on s'intéresse à la suite  $\sum_{n=1}^N \omega_{\sigma(n)}$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

si  $k \in \sigma([1, N])$ , de plus il y a un seul antécédent donc  $\sum_{n=1}^N \omega_{\sigma(n)}(k) = \frac{1}{k}$ ; de même si  $k \notin \sigma([1, N])$ ,

$$\sum_{n=1}^N \omega_{\sigma(n)}(k) = 0.$$

On peut donc penser que la série  $\sum \omega_{\sigma(n)}$  vers la suite  $U = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Cette suite vérifie :  $\sum U(n)^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ , cette série est convergente donc  $U \in l^2$ .

On a  $\left( \sum_{n=1}^N \omega_{\sigma(n)} - U \right)(k) = -\frac{1}{k}$  si  $k \notin \sigma([1, N])$ , 0 sinon.

On a alors

$$\left\| \sum_{n=1}^N \omega_{\sigma(n)} - U \right\|_2 = \sum_{n \notin \sigma([1, N])} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n > \min\{\mathbb{N} \setminus \sigma([1, N])\}} \frac{1}{n^2}$$

Comme on a que la suite  $(\sigma([1, N]))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de parties finies de  $\mathbb{N}^*$ , croissante pour l'inclusion et telle que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma([1, N]) = \mathbb{N}^*$  car  $\sigma$  est surjective. On en déduit que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \min\{\mathbb{N} \setminus \sigma([1, N])\} = +\infty$ , et

donc que  $\left\| \sum_{n=1}^N \omega_{\sigma(n)} - U \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

D'où le résultat cherché.

(b) Quelle est la nature de la série  $\sum \|\omega_n\|_2$ ? Ceci est-il en contradiction avec le résultat de la question 3)?

**Correction :** on a directement que  $\|\omega_n\|_2 = \frac{1}{n}$  donc la série  $\sum \|\omega_n\|_2$  est divergente.

Cela ne contredit pas la question 3) car l'espace  $l^2$  n'est pas de dimension finie.