Devoir maison n°3

MP Clemenceau 2022-2023

Pour le lundi 10 octobre 2022 à 8h

Vous chercherez de préférence tout le sujet mais vous ne rendrez rédigées correctement que les questions :
Partie I, 1c), 1d), 2c)
Partie II, 1) et 3)

Les parties I, II sont indépendantes.

NOTATIONS : Pour une suite réelle $(u_k)_{k\geq 1}$ la notation $\sup\limits_{k\geq 1}(u_k)$ désigne $+\infty$ si la suite (u_k) n'est pas majorée et la borne supérieure de $\{u_k \,/\, k \geq 1\}$ si cette suite est majorée.

Pour deux entiers naturels $p \leq q$, on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à p et inférieurs ou égaux à q.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

PARTIE I : Théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé complet (on admettra ce que cela veut dire en temps voulu). On notera $B(x, r)$ [resp. $\overline{B}(x, r)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre x et de rayon $r > 0$.

On considère une suite $(O_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts de E telle que, pour tout $n \geq 1$, l'adhérence $\overline{O}_n$ de O_n est égale à E (ainsi O_n est dense dans E).

1) **(a)** Soit G un ouvert non vide de E. Montrer que l'on peut trouver une suite décroissante de boules $(B(x_n, \varepsilon_n))_{n\geq 1}$, c'est à dire

$$B(x_1, \varepsilon_1) \supset B(x_2, \varepsilon_2) \supset \cdots \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \dots$$

avec, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset G \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

(c) On admet qu'une suite de Cauchy est convergente dans un espace vectoriel complet (en fait c'est la définition d'un espace complet). Montrer que

$$G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \neq \emptyset.$$

(d) Conclure que

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i} = E$$

2) On considère une suite $(L_k)_{k\geq 1}$ de formes linéaires continues sur E.

On note $|||L|||$ la norme d'une forme linéaire continue L, c'est-à-dire

$$|||L||| = \sup_{\|x\|\leq 1} |L(x)|.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$V_n = \left\{ x \in E,\, \sup_{k\geq 1} |L_k(x)| > n \right\}$$

et

$$\Omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

(a) Pour tout $n \geq 1$, montrer que V_n est un ouvert de E.

(b) Montrer que Ω est dense dans E si et seulement si pour tout $n \geq 1$, V_n est dense dans E.

(c) Prouver que si Φ est une forme linéaire sur E qui reste bornée sur une boule de rayon $\rho > 0$ et de centre z quelconque alors Φ est continue et donner une majoration de sa norme.

(d) On suppose que Ω n'est pas dense dans E. Montrer alors qu'il existe un réel M tel que pour tout $k \geq 1$, $|||L_k||| \leq M$. Que vaut Ω dans ce cas ?

PARTIE II : Permutation des termes d'une série.

1) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et $\sum v_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que la série $\sum v_{\sigma(n)}$ converge.

2) Soit $\sum w_n$ une série réelle convergente telle que $\sum |w_n|$ diverge.

(a) Pour x réel on note $x^+ = \sup\{x, 0\}$ et $x^- = \sup\{-x, 0\}$. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

(b) Quelles sont les natures des séries $\sum w_n^+$ et $\sum w_n^-$?

(c) Montrer que l'on peut construire une bijection σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et deux applications strictement croissantes φ et ψ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} w_{\sigma(i)} \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\psi(n)} w_{\sigma(i)} \leq -1.$$

On proposera un algorithme permettant de proche en proche la détermination des valeurs de σ et la construction de φ et de ψ.

(d) Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum w_{\sigma(n)}$?

3) Dans cette question $(F, \|\cdot\|_F)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de F. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ si et seulement si la série $\sum \|u_n\|_F$ converge.

4) On suppose dans cette question que F désigne l'espace l^2 des suites réelles $v = (v(k))_{k\geq 1}$ telles que $\sum v(k)^2$ converge, muni de la norme

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v(k)^2\right)^{1/2}.$$

On pose, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$, la série $\sum \omega_{\sigma(n)}$ converge dans F.

(b) Quelle est la nature de la série $\sum \|\omega_n\|_2$? Ceci est-il en contradiction avec le résultat de la question 3) ?