Correction : Devoir maison n°2

MP Clemenceau 2024-25

pour le vendredi 20 septembre 2024

Soit E un K espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E . On désigne par $\ker(u)$ le noyau de u et $\text{Im}(u)$ l'image de u .

Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \cdots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E .

PREMIERE PARTIE

A -

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le rang de u et donner une base de $\text{Im}(u)$, une base de $\ker u$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Correction : le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, on a donc :

$$\text{rg}(M) \underset{C_1 - C_2 \rightarrow C_1}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \underset{C_3 + C_4 \rightarrow C_3}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 2$$

Autre rédaction : Les colonnes C_1 et C_2 sont égales, les colonnes C_3 et C_4 sont opposées, et C_1 et C_3 sont clairement non colinéaires, donc le rang de M est 2.

L'image d'un endomorphisme est engendré par l'image des vecteurs d'une base.

On a donc $\text{Im}(u) = \text{vect} \{e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$. Donc une base de $\text{Im}(u)$ est $(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$.

D'après le théorème du rang, comme $\text{rg}(u) = 2$, le noyau de u est un sous espace vectoriel de E de dimension 2. D'après les calculs pour obtenir le rang on a $u(e_1 - e_2) = 0$ et $u(e_3 + e_4) = 0$. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_3 + e_4$ sont clairement non colinéaires, on en déduit qu'une base de $\ker(u)$ est $(e_1 - e_2, e_3 + e_4)$.

- 2) Calculer M^2 , M^3 et montrer que pour tout entier $p \geq 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que : $M^p = \alpha_p A$.

Expliciter alors M^p .

Correction : On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $M^2 = -2A$ et $M^3 = 4A$. On remarque que $A^2 = -2A$ et on a

alors, par récurrence, que, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $M^p = (-2)^{p-1} A$.

- 3)

- (a) Donner une base, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\text{Im}(u^2), \quad \ker(u^2), \quad \text{Im}(u^3), \quad \ker(u^3).$$

Correction : à l'aide des matrices trouvées à la question précédente on obtient :

$$\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u^3) = \text{Vect}(e_3 - e_4) \quad \text{et} \quad \ker(u^2) = \ker(u^3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3 + e_4)$$

- (b) Déterminer : $\forall k \geq 2$, $\ker(u^k)$, $\text{Im}(u^k)$.

Correction : Soit $k \geq 2$. Comme les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de u^k sont proportionnelles à celle de u^2 on a directement que $\text{Im}(u^k) = \text{Vect}(e_3 - e_4)$ et $\ker(u^k) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3 + e_4)$

- (c) Montrer que $E = \ker(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

Correction : on montre que la famille $(e_1, e_2, e_3 + e_4, e_3 - e_4)$ est libre donc une base de E , pour en déduire le résultat.

B -

Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P' .

- 4) d est-il injectif? d est-il surjectif? Comment peut-on en déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie?

Correction : d n'est pas injective car deux polynômes différents d'une constante ont même dérivée. On peut dire aussi que le noyau de cette application est $\mathbb{R}_0[X]$ qui n'est pas réduit à 0.

d est surjective car tout polynôme admet une primitive dans $\mathbb{K}[x]$.

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injectif si et seulement si il est surjectif si et seulement si il est bijectif. Comme d est surjective mais non injective, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

- 5) Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\ker(d^q)$.

Correction : par récurrence (par exemple) on a $\ker(d^p) = \mathbb{K}_{p-1}[X]$. On peut aussi le justifier en raisonnant sur le degré.

DEUXIEME PARTIE

Soit u un endomorphisme de E , pour tout entier naturel p , on notera $I_p = \text{Im}(u^p)$ et $K_p = \ker(u^p)$.

- 6) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

Correction : Soit $y \in \text{Im}(u^{p+1})$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x)$. Pour un tel x on a alors $u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$, donc y est un élément de $\text{Im}(u^p)$.

Conclusion : $I_{p+1} \subset I_p$.

Soit $x \in \ker(u^p)$, on a $u^{p+1}(x) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$, donc x est élément de $\ker(u^{p+1})$.

Conclusion : $K_p \subset K_{p+1}$.

- 7) On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N}$, I_p et K_p .

Correction : en dimension finie tout endomorphisme injectif est bijectif. La composée d'applications bijectives est bijective, donc, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = E$ et $K_p = \{0\}$.

- 8) On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

- (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.

Correction : Pour $p \in \mathbb{N}$ l'inclusion $K_p \subset K_{p+1}$ implique que $\dim(K_p) \leq \dim(K_{p+1})$. La suite $(\dim(K_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'entiers croissante et majorée par $\dim(E)$, elle est donc constante à partir d'un certain rang. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} / K_k = K_{k+1}\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément r . La suite $(\dim(K_k))_{k \in [1, r]}$ est alors strictement croissante. On obtient alors par récurrence que $\dim(K_r) \geq r - 1 + \dim(K_1)$. Par hypothèse $\dim(K_1) \geq 1$, donc $\dim(K_r) \geq r$. Or $\dim(K_r) \leq \dim(E)$ d'où $r \leq n$. On a donc $K_r \subset K_{r+1}$ et $\dim(K_r) = \dim(K_{r+1})$, donc $K_r = K_{r+1}$.

- (b) Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

Correction : On a, d'après la question 6) que $I_{r+1} \subset I_r$, de plus, d'après le théorème du rang et ce qui précède :

$$\dim(\text{Im}(u^r)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^r)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^{r+1})) = \dim(\text{Im}(u^{r+1}))$$

On en déduit que $I_r = I_{r+1}$.

Soit $p \geq r$, supposons que $I_p = I_{p+1}$. On a toujours, d'après la question **6**) que $I_{p+2} \subset I_{p+1}$. Soit $y \in I_{p+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x) = u(u^p(x))$. Par hypothèse $I_p = I_{p+1}$ donc il existe $x' \in E$ tel que $u^p(x) = u^{p+1}(x')$. On a alors $y = u^{p+2}(x')$. On en déduit que $I_{p+1} \subset I_{p+2}$ et par suite $I_{p+1} = I_{p+2}$.

On vient donc de montrer par récurrence que pour tout $p \geq r$, $I_p = I_{p+1}$, et par suite que pour tout $p \geq 0$, $I_{r+p} = I_r$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, l'inclusion $K_r \subset K_{r+p}$ et le théorème du rang ($\dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r)$), permet d'avoir l'égalité $K_r = K_{r+p}$.

(c) Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

Correction : soit $x \in K_r \cap I_r$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u^r(y)$. On a aussi $u^r(x) = 0$, d'où $u^{2r}(y) = 0$, donc y est un élément de K_{2r} . Or d'après la question précédente $K_{2r} = K_r$, donc $u^r(y) = 0$ et par suite $x = 0$.

D'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r)$, on en déduit que $E = K_r \oplus I_r$.

9) Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Correction : si on reprend l'exemple de la dérivation d , on a pour tout r $K_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$ et donc $K_r \neq K_{r+1}$.