

# Devoir maison n°2

MP Clemenceau 2024-25

pour le vendredi 20 septembre 2024

Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On désigne par  $\ker(u)$  le noyau de  $u$  et  $\text{Im}(u)$  l'image de  $u$ .

Pour tout entier  $k$  strictement positif,  $u^k$  désigne l'endomorphisme  $u \circ u \circ u \cdots \circ u$  ( $k$  fois) et  $u^0$  désigne l'application identique de  $E$ .

## PREMIERE PARTIE

**A** - Dans cette partie,  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  dont une base est  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  tel que la matrice de  $u$  par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le rang de  $u$  et donner une base de  $\text{Im}(u)$ , une base de  $\ker u$  en fonction des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ .
- 2) Calculer  $M^2$ ,  $M^3$  et montrer que pour tout entier  $p \geq 2$ , il existe un réel  $\alpha_p$  et une matrice  $A$  telle que :  $M^p = \alpha_p A$ .  
Expliciter alors  $M^p$ .
- 3)

(a) Donner une base, en fonction des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ , de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\text{Im}(u^2), \quad \ker(u^2), \quad \text{Im}(u^3), \quad \ker(u^3).$$

(b) Déterminer :  $\forall k \geq 2$ ,  $\ker(u^k)$ ,  $\text{Im}(u^k)$ .

(c) Montrer que  $E = \ker(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$ .

**B** - Soit  $\mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$  et  $d$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  qui à un polynôme  $P$  associe son polynôme dérivé  $P'$ .

- 4)  $d$  est-il injectif ?  $d$  est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie ?
- 5) Déterminer :  $\forall q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ker(d^q)$ .

## DEUXIEME PARTIE

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , pour tout entier naturel  $p$ , on notera  $I_p = \text{Im}(u^p)$  et  $K_p = \ker(u^p)$ .

- 6) Montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $K_p \subset K_{p+1}$  et  $I_{p+1} \subset I_p$ .
- 7) On suppose que  $E$  est de dimension finie et  $u$  injectif. Déterminer :  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $I_p$  et  $K_p$ .
- 8) On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n$  non nulle et  $u$  non injectif.
  - (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel  $r \leq n$  tel que :  $K_r = K_{r+1}$ .
  - (b) Montrer qu'alors :  $I_r = I_{r+1}$  et que :  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $K_r = K_{r+p}$  et  $I_r = I_{r+p}$ .
  - (c) Montrer que :  $E = K_r \oplus I_r$ .
- 9) Lorsque  $E$  n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel  $r$  tel que  $K_r = K_{r+1}$  ?