Devoir maison n°2

MP Clemenceau 2023-24

Pour le lundi 18 septembre 2023

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M.

Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $M^{k+1} = M\,M^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

1) Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

2) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3) Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

4) Montrer que $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$.

5) Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

6) En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

7) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et que $2r \leqslant n$.

8) On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots,$ est une base de E.

9) Donner la matrice de u dans cette base.

10) On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \ker(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1,\ e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\ker(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

11) Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Un exemple

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

12) Calculer la trace et le rang de A.
Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

13) Démontrer que A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P\, diag(J_2, J_1)\, P^{-1}$.