Correction : du Devoir maison n°2

MP Clemenceau 2022-2023

Pour le vendredi 23 septembre 2022

On considère l'ensemble E des matrices de la forme : $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

1) Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension finie, à préciser en donnant une base.

Correction : Pour montrer que E est un espace vectoriel (on devrait dire $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais ici le corps est fixé), il suffit de montrer que c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On peut alors répondre aux trois questions en même temps (même si en général il faut éviter...).

On a en effet, de manière immédiate que $E = Vect\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. On a une base de E et $\dim(E) = 3$.

2) Soient A et B deux matrices de E, calculer AB.
Est-ce un élément de E ?

Correction : On a, avec $A = A(a,b,c)$ et $B = A(a',b',c')$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ b' & a' & b' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bb'+cc' & ab'+ba'+cb' & ac'+bb'+ca' \\ ba'+ab'+bc' & 2bb'+aa' & bc'+ab'+ba' \\ ca'+bb'+ac' & cb'+ba'+ab' & cc'+bb'+aa' \end{pmatrix}$$

Ce n'est pas un élément de E.

3) On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A(a,b,c)$.

(a) Donner le déterminant de f.
Correction : on calcule dérictement le déterminant de A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_1 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c-a \\ b & a & 0 \\ c & b & a-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{linéarité}}{=} (c-a) \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ c & b & -1 \end{vmatrix} \overset{L_1 + L_3 \to L_3}{=} (c-a) \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ a+c & 2b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{développement 3ième colonne}}{=} (c-a) \begin{vmatrix} b & a \\ a+c & 2b \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)\left(2b^2 - a(a+c)\right)$$

(b) Trouver les valeurs λ vérifiant : il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = \lambda x$.
On note $E_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x) = \lambda x\right\}$.
Correction : on cherche λ tel qu'il existe x non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire $(f - \lambda Id)(x) = 0$.
Cela veut dire que l'endomorphisme $(f - \lambda Id)$ n'est pas bijectif. Cela est vrai si et seulement si son déterminant est non nul.
On cherche donc λ tel que $\det(f - \lambda Id) = 0$. En remplaçant a par $a - \lambda$ dans le calcul précédent on obtient

$$\det(f - \lambda Id) = (c - a + \lambda)\left(2b^2 - (a-\lambda)(a - \lambda + c)\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \det(f - \lambda Id) &= 0 \Leftrightarrow \lambda = a - c \text{ ou } \lambda^2 - (2a+c)\lambda + ac - 2b^2 + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = a - c \text{ ou } \lambda = \frac{c + 2a \pm \sqrt{c^2 + 8b^2}}{2} \end{aligned}$$

4) Cas $b = c$

(a) Donner les espaces E_λ associés aux valeurs trouvées précédemment. On donnera une base de chacun des espaces.

Correction : les valeurs trouvées précédemment sont donc $\lambda = a - c$ (qui apparait deux fois) et $\lambda = a + 2c$
On cherche donc les sous espaces suivants

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{x \in E \quad / \quad f(x) = (a-c)\, x\} \\ E_2 & = & \{x \in E \quad / \quad f(x) = (a+2c)\, x\} \end{array}$$

Pour chercher E_1 on résoud le système :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a-c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a-c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax_1 + cx_2 + cx_3 = (a-c)\, x_1 \\ cx_1 + ax_2 + cx_3 = (a-c)\, x_2 \\ cx_1 + cx_2 + ax_3 = (a-c)\, x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow c\,(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

Si c est nul alors la matrice est diagonale et pour tout x de E $f(x) = ax$.
On suppose donc c non nul et donc

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{x \in E \quad / \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ & = & Vect\,((1,0,-1)\,,(0,1,-1)) \end{array}$$

Pour chercher E_2 on résoud le système :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a+2c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a+2c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax_1 + cx_2 + cx_3 = (a+2c)\, x_1 \\ cx_1 + ax_2 + cx_3 = (a+2c)\, x_2 \\ cx_1 + cx_2 + ax_3 = (a+2c)\, x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

On en déduit que $E_2 = Vect\,((1,1,1))$

(b) Montrer que ce sont des espaces supplémentaires.

Correction : soit $x \in E_1 \cap E_2$, par définition des sous espaces on a

$$f(x) = (a-c)\, x \qquad \text{et} \qquad f(x) = (a+2c)\, x$$

on en déduit que $x = 0$, et donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
De plus on a $\dim(E_1) = 2$ et $\dim(E_2) = 1$, on peut donc conclure que $E_1 \oplus E_2 = E$

(c) En utilisant les vecteurs trouvés dans les questions précédentes, construire une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Correction : on pose $e_1 = (1,0,-1)\,, e_2 = (0,1,-1)$ et $e_3 = (1,1,1)$.
La famille est une base si et seulement si son déterminant dans la base canonique est non nul

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

C'est donc bien une base.
Remarque : c'est une base adaptée à la somme directe.
On a, par définition des vecteurs $f(e_1) = (a-c)\, e_1$, $f(e_2) = (a-c)\, e_2$ et $f(e_3) = (a+2c)\, e_3$. La matrice dans cette base est donc

$$D = \begin{pmatrix} a-c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a+2c \end{pmatrix}$$

(l'endomorphisme est diagonalisable)

(d) Caractériser l'application dans la cas $a = -\frac{1}{3}$ et $b = c = \frac{2}{3}$.
Correction : les valeurs trouvées précédemment sont alors -1 et 1. La matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est alors

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnait la matrice d'une symétrie. C'est la symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1

5) Cas général

(a) On considère les vecteurs, donnés dans la base canonique par

$$e_1 = (1, 0, -1) \qquad e_2 = (1, -1, 1) \qquad e_3 = (1, 1, 1)$$

Montrer ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$
Correction : calculons le déterminant de la famille dans la base canonique

$$\begin{aligned} \det(e_1, e_2, e_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1+L_3 \to L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Le déterminant est non nul donc la famille est bien une base de E.

(b) Donner la matrice P de passage de la base canonique à cette base.
Correction : par définition la matrice demandée est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer l'inverse de P.
Correction : on va résoudre le système $PX = X'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = x' \\ -y + z = y' \\ -x + y + z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = x' \\ -y + z = y' \\ 2x = x' - z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = x' - x = \frac{1}{2}(x' + z') \\ -y + z = y' \\ x = \frac{1}{2}(x' - z') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' - z') \\ 2y = \frac{1}{2}(x' + z') - y' \\ 2z = \frac{1}{2}(x' + z') + y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}z' \\ y = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}z' \\ z = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(d) Donner la matrice de f dans cette base.
Correction : on utilise la formule de changement de bases. Si on note A' la matrice cherchée, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

Ce qui donne après calculs

$$A' = \begin{pmatrix} a - c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ 0 & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c & a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

(e) Retrouver alors les résultats de la question 4.
Correction : si $b = c$, la matrice A' est alors

$$A' = \begin{pmatrix} a - c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & c & a + 2c \end{pmatrix}$$

on retrouve alors les valeurs λ tel que $f(x) = \lambda x$. Ce sont bien $a - c$ et $a + 2c$

6) On suppose $a = -1 + \sqrt{3}$, $b = 1$ et $c = 2$

(a) Calculer le rang de f (choisir correctement la matrice).
Correction : on considère la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3)

$$A' = \begin{pmatrix} -3+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on calcule le déterminant de $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ on trouve 0. On en déduit que cette matrice est de rang 2

(b) Calculer l'image et le noyau de f.
Correction : Comme la matrice, donc f est de rang 2, il suffit de prendre deux colonnes non colinéaires de la matrice de départ (dans la base canonique) pour avoir une base de l'image. Et donc $\mathrm{Im}(f) = Vect((-1+\sqrt{3}, 1, 2), (1, -1+\sqrt{3}, 1))$.
Pour le noyau : par exemple par résolution de $AX = 0$, on trouve $\ker(f) = Vect(1, -1-\sqrt{3}, 1))$