

Devoir maison n°2

MP Clemenceau 2022-2023

Pour le vendredi 23 septembre 2022

On considère l'ensemble E des matrices de la forme : $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension finie, à préciser en donnant une base.
- 2) Soient A et B deux matrices de E , calculer AB .
Est-ce un élément de E ?
- 3) On considère f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A(a, b, c)$.
 - (a) Donner le déterminant de f .
 - (b) Trouver les valeurs λ vérifiant : il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = \lambda x$.
On note $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = \lambda x\}$.
- 4) **Cas $b = c$**
 - (a) Donner les espaces E_λ associés aux valeurs trouvées précédemment. On donnera une base de chacun des espaces.
 - (b) Montrer que ce sont des espaces supplémentaires.
 - (c) En utilisant les vecteurs trouvés dans les questions précédentes, construire une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de f dans cette base.
 - (d) Caractériser l'application dans la cas $a = -\frac{1}{3}$ et $b = c = \frac{2}{3}$.
- 5) **Cas général**
 - (a) On considère les vecteurs, donnés dans la base canonique par
$$e_1 = (1, 0, -1) \quad e_2 = (1, -1, 1) \quad e_3 = (1, 1, 1)$$
Montrer ces vecteurs forment une base de \mathbb{R}^3
 - (b) Donner la matrice P de passage de la base canonique à cette base.
 - (c) Calculer l'inverse de P .
 - (d) Donner la matrice de f dans cette base.
 - (e) Retrouver alors les résultats de la question 4.
- 6) On suppose $a = -1 + \sqrt{3}$, $b = 1$ et $c = 2$
 - (a) Calculer le rang de f (choisir correctement la matrice).
 - (b) Calculer l'image et le noyau de f .