Correction : Devoir maison n°1

MP Clemenceau 2024-25

pour le vendredi 6 septembre 2024

Exercice d'analyse : Convergence de séries par transformation d'Abel

1) On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$.
Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.

$$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n - a_1 B_0$$

$$= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k - (a_0 - a_1)B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$$

2) On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

Correction : Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ est également convergente. C'est même une condition nécessaire et suffisante.
On peut imaginer que l'auteur du sujet attendait une démonstration de cours ici. Il faut alors refaire la démonstration utilisant le téléscopage.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Correction : Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$.

Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.
Le premier terme est une somme partielle de la série de terme général $(a_k - a_{k+1})B_k$.
Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1})B_k| \leq |a_k - a_{k+1}|M = (a_k - a_{k+1})M$ car (a_k) est une suite décroissante.
Ainsi, $(a_k - a_{k+1})B_k$ est dominée par une le terme général d'une série absolument convergente.
Donc $(a_k - a_{k+1})B_k$ est lui même le terme général d'une série absolument convergente ce qui termine la démonstration de cette question.
Remarque : on peut résumer aussi en écrivant, avec les hypothèses de l'énoncé, que $(a_k - a_{k+1})B_k = O\left(a_k - a_{k+1}\right)$.

c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

Correction :

- *Version très résumée mais juste ! :* Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.

- Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ est une suite bornée.
  On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce qui assure bien le résultat demandé.

3) Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$

Correction : On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.
On a : $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = e^{i\theta}\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\dfrac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\dfrac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2}\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Correction :

- Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
- Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
- Soit $\alpha \in]0, 1]$.
  On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question précédente.
  Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.
  La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0.
  D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta}\right| \leq \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles est bornée.
  Conclusion : la série est convergente.

4) Soit la série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \dfrac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.
Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$, la question précédente assure la convergence de la série de terme général z_n et le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de terme général $\Im(z_n) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le terme général d'une série convergente.
Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'algèbre

On considère l'ensemble E des matrices de la forme : $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

1) Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension finie, à préciser en donnant une base.

Correction : Pour montrer que E est un espace vectoriel (on devrait dire $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais ici le corps est fixé), il suffit de montrer que c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On peut alors répondre aux trois questions en même temps (même si en général il faut éviter...).

On a en effet, de manière immédiate que $E = Vect\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. On a une base de E et $\dim(E) = 3$.

2) Soient A et B deux matrices de E, calculer AB.
Est-ce un élément de E ?

Correction : On a, avec $A = A(a,b,c)$ et $B = A(a',b',c')$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ b' & a' & b' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bb'+cc' & ab'+ba'+cb' & ac'+bb'+ca' \\ ba'+ab'+bc' & 2bb'+aa' & bc'+ab'+ba' \\ ca'+bb'+ac' & cb'+ba'+ab' & cc'+bb'+aa' \end{pmatrix}$$

Ce n'est pas un élément de E.

3) On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A(a,b,c)$.

(a) Donner le déterminant de f.
Correction : on calcule dérictement le déterminant de A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_1 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c-a \\ b & a & 0 \\ c & b & a-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{linéarité}}{=} (c-a) \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ c & b & -1 \end{vmatrix} \overset{L_1+L_3 \to L_3}{=} (c-a) \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ a+c & 2b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{développement 3ième colonne}}{=} (c-a) \begin{vmatrix} b & a \\ a+c & 2b \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)\left(2b^2 - a(a+c)\right)$$

(b) Trouver les valeurs λ vérifiant : il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = \lambda x$.
On note $E_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x) = \lambda x\right\}$.
Correction : on cherche λ tel qu'il existe x non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire $(f - \lambda Id)(x) = 0$. Cela veut dire que l'endomorphisme $(f - \lambda Id)$ n'est pas bijectif. Cela est vrai si et seulement si son déterminant est non nul.
On cherche donc λ tel que $\det(f - \lambda Id) = 0$. En remplaçant a par $a - \lambda$ dans le calcul précédent on obtient

$$\det(f - \lambda Id) = (c - a + \lambda)\left(2b^2 - (a-\lambda)(a - \lambda + c)\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \det(f - \lambda Id) &= 0 \Leftrightarrow \lambda = a - c \text{ ou } \lambda^2 - (2a+c)\lambda + ac - 2b^2 + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = a - c \text{ ou } \lambda = \frac{c + 2a \pm \sqrt{c^2 + 8b^2}}{2} \end{aligned}$$

4) **<u>Cas $b = c$</u>**

(a) Donner les espaces E_λ associés aux valeurs trouvées précédemment. On donnera une base de chacun des espaces.

Correction : les valeurs trouvées précédemment sont donc $\lambda = a - c$ (qui apparait deux fois) et $\lambda = a + 2c$

On cherche donc les sous espaces suivants

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{x \in E \quad / \quad f(x) = (a-c)\,x\} \\ E_2 & = & \{x \in E \quad / \quad f(x) = (a+2c)\,x\} \end{array}$$

Pour chercher E_1 on résoud le système :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a-c)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a-c)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax_1 + cx_2 + cx_3 = (a-c)\,x_1 \\ cx_1 + ax_2 + cx_3 = (a-c)\,x_2 \\ cx_1 + cx_2 + ax_3 = (a-c)\,x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow c\,(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

Si c est nul alors la matrice est diagonale et pour tout x de E $f(x) = ax$.

On suppose donc c non nul et donc

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{x \in E \quad / \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ & = & Vect\,((1,0,-1),(0,1,-1)) \end{array}$$

Pour chercher E_2 on résoud le système :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a+2c)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a+2c)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax_1 + cx_2 + cx_3 = (a+2c)\,x_1 \\ cx_1 + ax_2 + cx_3 = (a+2c)\,x_2 \\ cx_1 + cx_2 + ax_3 = (a+2c)\,x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

On en déduit que $E_2 = Vect\,((1,1,1))$

(b) Montrer que ce sont des espaces supplémentaires.

Correction : soit $x \in E_1 \cap E_2$, par définition des sous espaces on a

$$f(x) = (a-c)\,x \qquad \text{et} \qquad f(x) = (a+2c)\,x$$

on en déduit que $x = 0$, et donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

De plus on a $\dim(E_1) = 2$ et $\dim(E_2) = 1$, on peut donc conclure que $E_1 \oplus E_2 = E$

(c) En utilisant les vecteurs trouvés dans les questions précédentes, construire une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Correction : on pose $e_1 = (1,0,-1)$, $e_2 = (0,1,-1)$ et $e_3 = (1,1,1)$.

La famille est une base si et seulement si son déterminant dans la base canonique est non nul

$$\det(e_1,e_2,e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

C'est donc bien une base.

Remarque : c'est une base adaptée à la somme directe.

On a, par définition des vecteurs $f(e_1) = (a-c)\,e_1$, $f(e_2) = (a-c)\,e_2$ et $f(e_3) = (a+2c)\,e_3$. La matrice dans cette base est donc

$$D = \begin{pmatrix} a-c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a+2c \end{pmatrix}$$

(l'endomorphisme est diagonalisable)

(d) Caractériser l'application dans la cas $a = -\frac{1}{3}$ et $b = c = \frac{2}{3}$.
Correction : les valeurs trouvées précédemment sont alors -1 et 1. La matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est alors

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnait la matrice d'une symétrie. C'est la symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1

5) <u>Cas général</u>

(a) On considère les vecteurs, donnés dans la base canonique par

$$e_1 = (1, 0, -1) \qquad e_2 = (1, -1, 1) \qquad e_3 = (1, 1, 1)$$

Montrer ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$
Correction : calculons le déterminant de la famille dans la base canonique

$$\begin{aligned} \det(e_1, e_2, e_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1+L_3 \to L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Le déterminant est non nul donc la famille est bien une base de E.

(b) Donner la matrice P de passage de la base canonique à cette base.
Correction : par définition la matrice demandée est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer l'inverse de P.
Correction : on va résoudre le système $PX = X'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = x' \\ -y + z = y' \\ -x + y + z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = x' \\ -y + z = y' \\ 2x = x' - z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = x' - x = \frac{1}{2}(x' + z') \\ -y + z = y' \\ x = \frac{1}{2}(x' - z') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' - z') \\ 2y = \frac{1}{2}(x' + z') - y' \\ 2z = \frac{1}{2}(x' + z') + y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}z' \\ y = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}z' \\ z = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(d) Donner la matrice de f dans cette base.
Correction : on utilise la formule de changement de bases. Si on note A' la matrice cherchée, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

Ce qui donne après calculs

$$A' = \begin{pmatrix} a - c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ 0 & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c & a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

(e) Retrouver alors les résultats de la question 4.
Correction : si $b = c$, la matrice A' est alors

$$A' = \begin{pmatrix} a - c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & c & a + 2c \end{pmatrix}$$

on retrouve alors les valeurs λ tel que $f(x) = \lambda x$. Ce sont bien $a - c$ et $a + 2c$

6) On suppose $a = -1 + \sqrt{3}$, $b = 1$ et $c = 2$

(a) Calculer le rang de f (choisir correctement la matrice).
Correction : on considère la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3)

$$A' = \begin{pmatrix} -3+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on calcule le déterminant de $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ on trouve 0. On en déduit que cette matrice est de rang 2

(b) Calculer l'image et le noyau de f.
Correction : Comme la matrice, donc f est de rang 2, il suffit de prendre deux colonnes non colinéaires de la matrice de départ (dans la base canonique) pour avoir une base de l'image. Et donc $\mathrm{Im}(f) = Vect((-1+\sqrt{3}, 1, 2), (1, -1+\sqrt{3}, 1))$.
Pour le noyau : par exemple par résolution de $AX = 0$, on trouve $\ker(f) = Vect(1, -1-\sqrt{3}, 1))$