Correction : Devoir maison n°1

MP Clemenceau 2022-23

pour le vendredi 16 septembre 2022

Convergence de séries par transformation d'Abel

1) On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$.
Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.

$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0$

$= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$

2) On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

Correction : Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ est également convergente. C'est même une condition nécessaire et suffisante.
On peut imaginer que l'auteur du sujet attendait une démonstration de cours ici. Il faut alors refaire la démonstration utilisant le téléscopage.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Correction : Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.
Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.
Le premier terme est une somme partielle de la série de terme général $(a_k - a_{k+1}) B_k$.
Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| M = (a_k - a_{k+1}) M$ car (a_k) est une suite décroissante.
Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le terme général d'une série absolument convergente.
Donc $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est lui même le terme général d'une série absolument convergente ce qui termine la démonstration de cette question.
Remarque : on peut résumer aussi en écrivant, avec les hypothèses de l'énoncé, que
$(a_k - a_{k+1}) B_k = O(a_k - a_{k+1})$.

c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

Correction :

- *Version très résumée mais juste ! :* Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.

- Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ est une suite bornée.
  On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce qui assure bien le résultat demandé.

3) Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$

Correction : On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.
On a : $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = e^{i\theta}\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\dfrac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\dfrac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2}\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Correction :

- Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
- Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
- Soit $\alpha \in]0, 1]$.
  On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question précédente.
  Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.
  La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0.
  D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta}\right| \leq \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles est bornée.
  Conclusion : la série est convergente.

4) Soit la série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \dfrac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.
Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$, la question précédente assure la convergence de la série de terme général z_n et le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de terme général $\Im(z_n) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le terme général d'une série convergente.
Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$.