

# Devoir maison n°1

MP Clemenceau 2022-23

pour le vendredi 16 septembre 2022

## Convergence de séries par transformation d'Abel

- 1) On considère une suite de réels  $(a_n)$ , une suite de complexes  $(b_n)$  et on note pour tout entier naturel  $n$  :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

En remarquant que, pour  $k \geq 1$ ,  $b_k = B_k - B_{k-1}$ , démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \text{ (transformation d'Abel).}$$

- 2) On suppose que la suite  $(B_n)$  est bornée et que la suite  $(a_n)$  est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série  $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$  converge.

b) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$  converge.

c) En appliquant le résultat précédent au cas où  $b_n = (-1)^n$ , donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

- 3) Exemple.

Dans cette question,  $\theta$  est un réel différent de  $2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

a) Calculer pour  $n$  entier naturel non nul,  $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$

b) Discuter en fonction du réel  $\alpha$  la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ .

- 4) Soit la série de fonction  $\sum_{n \geq 1} u_n$  où pour  $x$  réel et  $n$  entier naturel non nul,  $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ .

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de  $\mathbb{R}$ , c'est à dire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge