Développements limités usuels

I Obtenus par les formules de Taylor

Tableau des développements limités usuels en 0, à l'ordre n ou préciser par la puissance dans le o

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o\left(x^n\right) \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k x^k + o\left(x^n\right) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\sin\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1\right)^k}{\left(2k+1\right)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad \cos\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1\right)^k}{\left(2k\right)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(2k+1\right)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad \mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(2k\right)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\left(1+x\right)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \left(\alpha - k\right)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

En particulier :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k \frac{\left(2k\right)!}{2^{2k} \left(k!\right)^2} x^k + o\left(x^n\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(2k\right)!}{2^{2k} \left(k!\right)^2} x^k + o\left(x^n\right)$$

II Obtenus par intégrations

On intègre les développements obtenus précédemment.

$$\ln\left(1+x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k} x^k + o\left(x^n\right) \qquad \ln\left(1-x\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\arcsin\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(2k\right)!}{2^{2k} \left(k!\right)^2} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\arctan\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1\right)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

III Obtenu par calculs

En utilisant les développements de sin et cos, ou par utilisation du développement de la fonction réciproque, ou en utilisant la dérivée et par récurrence...

$$\tan\left(x\right) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o\left(x^7\right)$$