Devoir libre n°4

MP Clemenceau 2022-23

Pour ... avant les vacances de février

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top$ est sa matrice transposée, $rang(A)$ son rang et $\mathrm{tr}(A)$ sa trace.
I_n : la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^\top M = I_n$.
Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :
dans la partie II., $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie III., $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,
dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.

La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.
Remarque : dans le texte, le mot « positif » signifie « supérieur ou égal à 0 ».

I. Exercice préliminaire

1) Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = \Gamma^\top \Gamma$.
Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2) On pose $S = PDP^{-1} \in \mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

3) Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$.

Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A,\Pi) = \inf_{M\in\Pi} \|A - M\|$.

4) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5) Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - A^\top)\|$ et déterminer de même $d(A, \mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$.

6) Calculer $d(\Gamma, \mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7) Montrer qu'une matrice S de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8) Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice $A^\top A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ à termes positifs telle que $A^\top A = D^2$.
On note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

- **a)** Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer $A_i^\top A_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?
- **b)** Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$, de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_i E_i$.
- **c)** En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10) Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^\top A = B^\top B$.

- **a)** Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1}A^\top AP = P^{-1}B^\top BP = D^2$.
- **b)** Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11) Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire :
Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.
(Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

B. Calcul de $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$

12) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

13) Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

- **a)** Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$.
- **b)** Montrer que, $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$

14) On note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

- **a)** Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\operatorname{tr}(D\Omega) + n$.
- **b)** Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(D\Omega) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c) Conclure que $d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15) Montrer que , $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16) Calculer $d(\Gamma, \mathscr{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p.

17) Un résultat de densité.

a) Soit M un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.

b) En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

18) Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leqslant n$, $d(A, \Delta_p)$.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p.

A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$, P la matrice de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PDP^\top$ et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P.

Si k est un entier entre 1 et n, on note Ψ_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Nous allons montrer que :

$\lambda_k = \max\limits_{F \in \Psi_k} \min\limits_{X \in F \setminus \{0\}} \dfrac{X^\top A X}{X^\top X}$. (théorème de Courant et Fischer).

19) Soit X un vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, .., C_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des x_i et λ_i. (i compris entre 1 et n) : $X^\top A X$ et $X^\top X$ et, pour k entier entre 1 et n, $\dfrac{C_k^\top A C_k}{C_k^\top C_k}$.

20) Soit k entier entre 1et n, on pose $F_k = \operatorname{vect}\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$.
Montrer que pour tout X non nul de F_k , $\dfrac{X^\top A X}{X^\top X} \geqslant \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X \in F_k \setminus \{0\}} \dfrac{X^\top A X}{X^\top X}$.

21) Soit $F \in \Psi_k$

a) montrer que $\dim(F \cap \operatorname{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}) \geqslant 1$.

b) Si X est un vecteur non nul de $F \cap \operatorname{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}$, montrer que $\dfrac{X^\top A X}{X^\top X} \leqslant \lambda_k$.

22) Conclure.

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Dans toute cette partie : A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

23) Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes positifs telles que $A = EDP$. En déduire que le rang de la matrice $A^\top A$ est encore r. *(On pourra utiliser les résultats de la question* ***9)****)*

24) Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $A^\top A$ de rang r : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \cdots = \mu_n = 0$, si on pose $D = \operatorname{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_r}, 0, \dots, 0)$, si pour $1 \leqslant l \leqslant n$ on note M_l la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l-ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ de la question **23)**, tous les autres termes de M_l étant nuls, on a clairement : $ED = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l$.
Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = Tr(A^\top B)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$), toutes de rang un, et telles que $A = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} R_l = \sum\limits_{l=1}^{r} \sqrt{\mu_l} R_l$.

25) Avec les notations de la question **24)**, on pose $N = \sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l} R_l$.

Montrer que $\text{rang}(N) \leqslant p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leqslant \sqrt{\mu_{p+1} + \cdots + \mu_r}$.

26) Soit M une matrice de rang p ($p < r$), on note $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ les valeurs propres de la matrice $(^\top A - M)(A - M)$ et on pose $G = \ker(M) \cap \text{Im}(A^\top A)$.
Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

a) Montrer que $\dim G \geqslant r - p$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k, montrer que : $\alpha_k \geqslant \min_{X \in F \setminus \{0\}} \dfrac{X^\top A^\top A X}{X^\top X}$.

c) On note $(V_1, V_2, .., V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice $A^\top A$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \cdots = \mu_n = 0$.
Montrer que $\dim(G \cap \text{vect}\{V_1, V_2, .., V_{k+p}\}) \geqslant k$.

d) En déduire que $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

27) En déduire $d(A, \nabla_p)$.

28) Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.