Correction : du Devoir libre n°03

MP Clemenceau 2021-22

Pour le samedi 20 janvier 2023

Théorème d'Abel pour les séries entières

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable x ait pour rayon de convergence 1.

On note f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $(\mathscr{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
- $(\mathscr{P}_2)$: la fonction f admet une limite, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

A) Généralités :

1) En utilisant des développements en séries entières usuels, donner dans chaque cas suivant, un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

a) (a_n) vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.
Correction : on veut une série entière usuelle dont le rayon de convergence est 1 (et non infini).
En considérant, par exemple, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ on a bien une fonction développable en une série entière dont le rayon de convergence est 1. On a $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
Cette fonction admet une limite finie en 1 par valeurs inférieures (cela se vérifie par son expression) et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

b) (a_n) ne vérifie pas$(\mathscr{P}_1)$ et vérifie $(\mathscr{P}_2)$.
Correction : Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui une limite finie en 1 par valeurs inférieures, elle est développable en une série entière dont le rayon de convergence est 1 : $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, mais cette dernière n'est pas définie pour $x = 1$.

c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathscr{P}_1)$ ni $(\mathscr{P}_2)$.
Correction : En prenant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ on a une fonction développable en une série entière de rayon de convergence égal à 1 qui n'admet pas de limite finie en 1 et dont le développement n'est pas définie pour $x = 1$. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.

d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
Correction : une série qui converge uniformément sur $]-1,1[$ admet, par propriété, des limites finies en 1 et -1, il suffit de prendre la fonction précédente par exemple.

2) On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.Montrer alors que la fonction admet une limite finie à gauche en 1 et préciser cette limite.
Correction : Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente alors la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $]-1,1[$ donc uniformément. Par propriété elle admet donc une limite finie en 1.
On a en effet, sur $]-1,1[$, $\|x \mapsto a_n x^n\|_\infty = |a_n|$

B) Théorème d'Abel

3) On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors f admet une limite finie en 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$

a) Simplifier, pour tout $x \in [0,1]$, $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p}$.

Correction : Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = R_n(x)$.

b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum\limits_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

Correction : Il est bien connu que dans ces histoires, il faut travailler sur les sommes partielles ou alors justifier avant les convergences des séries utilisées :

$$\sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1}\, x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p}\, x^{n+p}$$

après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p}\, x^{p-1} - r_{n+k}\, x^{n+k}$$

le dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini car r_{n+k} tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et x^{n+k} est borné ; il suffit donc de faire tendre k vers l'infini. Le terme de gauche tend, d'après la question précédente, vers $R_n(x)$, on en déduit que la série $\sum r_{n+p} x^{n+p}$ converge et on obtient l'égalité cherchée. Celle-ci reste vraie pour $x = 1$.

c) Soit $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que, pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

Correction : Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0, par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 tel que pour tout $k \geq n_0$ on ait $|r_k| \leq \varepsilon/2$, alors on a bien $|r_{n+p}| \leq \varepsilon/2$ pour $n \geq n_0$ et p entier naturel. Et pour $x \in [0,1[$ et $n \geq n_0$ on obtient : $|R_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum\limits_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$. L'égalité reste vraie pour $x = 1$ car on a directement $|R_n(1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

d) Conclure .

Correction : D'après la question précédente la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$, or chaque fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$. On en déduit que la fonction définie par la série est aussi continue sur $[0,1]$.

4) Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$?

Correction : On vient de montrer (dans la question précédente) que si la série $\sum a_n$ converge alors la fonction f admet une limite finie en 1 par valeurs inférieurs. Par contraposée on en déduit que si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ alors la série $\sum a_n$ diverge.

5) *Application*

a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

On pourra examiner le cas du produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ *par elle même.*

Correction : on va montrer que l'exemple donné est le cas de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy ne converge pas.

Soient les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_0 = v_0 = 0$ et $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geqslant 1$. La série $\sum u_n$ converge d'après le critère des séries alternées.

Posons $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ pour $n \geqslant 0$, alors $c_0 = c_1 = 0$ et

$c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{k^{\frac{1}{4}} (n-k)^{\frac{1}{4}}} = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geqslant 2$.

Or pour $k \in [1, n-1]$, on a : $k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$, donc $|c_n| \geqslant \dfrac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^{\frac{1}{4}}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et par suite $\sum c_n$ diverge grossièrement.

b) Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose, pour tout entier n, $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Correction : On considère les séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ associées respectivement aux suites (u_n), (v_n) et (w_n). Commes les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors les rayons de convergence des séries entières associées sont au moins égaux à 1.

Par le théorème d'Abel, on a le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$.

Or pour $x \in]0;1[$, les séries numériques $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ convergent absolument et que pour tout $n \in N$, $w_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k x^k v_{n-k} x^{n-k}$, donc (d'après le cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n x^n$, et par passage à la limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

C) Réciproque du théorème d'Abel

6) Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.
Correction : c'est la question 1b) !

On cherche à rajouter une condition $(\mathscr{Q})$ à la condition $(\mathscr{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{Q})$ alors elle vérifie $(\mathscr{P}_1)$.

7) On prend pour $(\mathscr{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geqslant 0$.
Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{Q})$ alors elle vérifie $(\mathscr{P}_1)$.

Correction : Puisque les coefficients sont positifs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

On a donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \lim_{x\to1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.