Devoir libre n°03

MP Clemenceau 2021-22

Pour le samedi 20 janvier 2023

Théorème d'Abel pour les séries entières

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable x ait pour rayon de convergence 1.

On note f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $(\mathscr{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
- $(\mathscr{P}_2)$: la fonction f admet une limite, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

A) Généralités :

1) En utilisant des développements en séries entières usuels, donner dans chaque cas suivant, un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

a) (a_n) vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

b) (a_n) ne vérifie pas$(\mathscr{P}_1)$ et vérifie $(\mathscr{P}_2)$.

c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathscr{P}_1)$ ni $(\mathscr{P}_2)$.

d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

2) On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.Montrer alors que la fonction admet une limite finie à gauche en 1 et préciser cette limite.

B) Théorème d'Abel

3) On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors f admet une limite finie en 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x\in[0,1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$

a) Simplifier, pour tout $x\in[0,1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p}$.

b) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c) Soit $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que, pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x\in[0,1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

d) Conclure .

4) Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$?

5) *Application*

a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

On pourra examiner le cas du produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ *par elle même.*

b) Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose, pour tout entier n, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

C) Réciproque du théorème d'Abel

6) Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition $(\mathcal{Q})$ à la condition $(\mathscr{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$ alors elle vérifie $(\mathscr{P}_1)$.

7) On prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geqslant 0$.
Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$ alors elle vérifie $(\mathscr{P}_1)$.