Correction : Devoir libre n° 2 bis

MP Clemenceau 2022-23

Sujet de type Centrale

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matices de Hankel).

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.
On note σ l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui, à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monômes de plus haut degré vaut 1.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si M est une matrice carrée, on note ${}^tM$ sa transposée et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Pour tout f de $\mathscr{L}(E)$, et tout $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$).
Pour tout f de $\mathscr{L}(E)$, l'application $A \mapsto A(f)$ est alors un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$.

On a en particulier (utile dans la suite du problème) :

- Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = \sigma$ et $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors $A(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$.
- Pour tout $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y = A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel. On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire d'ordre* $p \geqslant 0$, s'il existe un polynôme $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit nulle, c'est à dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = 0 \qquad \textbf{(I.1)}$$

On dit que la relation **(I.1)** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire d'ordre p, dont A est un *polynôme caractéristique*.
L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **(I.1)** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quelque soit leur ordre.

I.A - Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un sous groupe de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à 0 et tel que pour tout $(A, B) \in J_x \times \mathbb{K}[x]$, AB est élément de J_x (autrement dit, J_x est un idéal de $K[X]$).

Correction : $J_x \neq \emptyset$ car $0 \in J_x$.

Soient A et B dans J_x. $(A + B)(\sigma)(x) = A(\sigma)(x) + B(\sigma)(x) = 0$, donc $A + B \in J_x$.

Soient A dans J_x et B dans $\mathbb{K}[X]$. $(AB)(\sigma)(x) = \big(B(\sigma)\circ A(\sigma)\big)(x) = B(\sigma)(0) = 0$, donc $AB \in J_x$.

J_x est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et, par définition même d'une suite récurrente linéaire, il n'est pas réduit à $\{0\}$.

On rappelle qu'il en résulte deux choses :

- d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal
- d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est *l'ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B - Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X - 1)^2$?

Correction : une suite récurrente linéaire x d'ordre 0 vérifie : il existe a_0 non nul tel que pour tout n $a_0 x_n = 0$. On en déduit que x est la suite nulle.
Réciproquement la suite nulle vérifie cette relation.
Conclusion : la seule suite d'ordre 0 est la suite nulle.

Soit x une suite récurrente linéaire d'ordre 1, d'après la question précédente il existe un polynôme de degré 1 unitaire $P = X + a_0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} + a_0 x_n = 0$. Dans ce cas on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = (-a_0)x_n$. La suite est donc une suite géométrique. Pour que cette suite ne soit pas d'ordre 0 il faut qu'elle ne soit pas nulle. Il faut donc que x_0 soit non nul.
Remarque : la suite géométrique de raison 0 mais de premier terme non nul est d'ordre 1 car elle vérifie bien $u_{n+1} + 0u_n = 0$.

Soit x une suite récurrente linéaire de polynôme minimal $(X - 1)^2$. Elle vérifie donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (a + bn)1^n = a + bn$.

Comme la suite n'est ni d'ordre 0, ni d'ordre 1, $(a, b) \neq (0, 0)$(suite nulle) et $(a, b) \neq (0, b)$ (suite géométrique non nulle de raison 1).

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.
Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x_n.

Correction : $(X + 1)^3 \in J_x$, donc le polynôme minimal de x est de la forme $(X + 1)^k$, avec $k \in [\![0, 3]\!]$.

x n'est pas une suite géométrique de raison -1, donc $k \geqslant 2$.

On vérifie immédiatement par récurrence que $x_{n+2}+2x_{n+1}+x_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On en conclut que le polynôme minimal de x est $(X+1)^2$ et que l'ordre minimal de x est 2.

I.C - L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A=\sum\limits_{k=0}^{p} a_kX^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p\geqslant 0$, que, sans perdre de généralité, on suppose unitaire.

I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

Correction : $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})=\ker(A(\sigma))$ donc $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et il est stable par σ car σ et $A(\sigma)$ commutent.

L'application linéaire $\begin{array}{ccc}\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & (x_0,x_1,\dots,x_{p-1})\end{array}$ est linéaire, et elle est bijective car une suite récurrente linéaire d'ordre p est entièrement déterminée par ses p premiers termes, donc $\dim(\mathcal{R}_A(\mathbb{K}))=\dim(\mathbb{K}^p)=p$.

I.C.2) Déterminer $(R)_A(\mathbb{K})$ quand $A=X^p$ (avec $p\geqslant 1$) et en donner une base.

Correction : $x\in\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ si et seulement si $x_n=0$ pour $n\geqslant p$ donc la famille $(e_k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$, où $e_k=(\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, est une base de $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p\geqslant 1$ et $A=(X-\lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.
On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n=Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.

a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.

Correction : L'application ψ $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ Q & \mapsto & (Q(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\end{array}$ est linéaire, injective (car si $Q\in\ker(\psi)$ alors Q s'annule sur $\mathbb{N}$, donc a une infinité de racines donc est nul) et $\mathrm{Im}(\psi)=E_A(\mathbb{K})$. Il en résulte que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})=E_A(\mathbb{K})$.

Correction : Notons $A_p=(X-\lambda)^p$. Selon C.1) et a), $\mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$ et $E_{A_p}(\mathbb{K})$ sont de dimension p ; il suffit donc de montrer que $E_{A_p}(\mathbb{K})\subset\mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$, ce que l'on va faire par récurrence sur p.

Pour $p=1$ c'est immédiat : $\mathcal{R}_{X-l}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites géométriques de raison l, c'est à dire $E_{X-\lambda}(\mathbb{K})$.

Supposons l'inclusion vraie au rang p et considérons $x\in E_{A_{p+1}}(\mathbb{K})$: $x_n=Q(n)\,\lambda^n$, avec $Q\in\mathbb{K}_p[X]$.

Posons $y=A_1(\sigma)(x)=(\sigma-\lambda\,\mathrm{Id})(x)$. On a $A_{p+1}(\sigma)(x)=(A_pA_1)(\sigma)(x)=\big(A_p(\sigma)\circ A_1(\sigma)\big)(x)=A_p(\sigma)(y)$.

D'autre part, $y_n=x_{n+1}-\lambda x_n=Q(n+1)\,\lambda^{n+1}-\lambda Q(n)\,\lambda^n=\lambda\big(Q(n+1)-Q(n)\big)\,\lambda^n$.

Le polynôme $\lambda\big(Q(X+1)-Q(X)\big)$ est de degré inférieur ou égal à $p-1$ donc, par hypothèse de récurrence, $y\in\mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$ et par conséquent $x\in\mathcal{R}_{A_{p+1}}(\mathbb{K})$.

Le théorème de récurrence s'applique et le résultat est vrai pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

I.D - Etude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A=X^{m_0}\prod\limits_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)^{m_k}$, où :

- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ sont les racines non nulles distinctes éventuelles de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \dots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)^{m_k} = 1$.
- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine éventuelle de A. Si 0 n'est pas racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg(A) = p$.
En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0, \quad x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$$

où, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg(Q_k) < m_k$.
Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

Correction : Notons $l_0 = 0$. Les polynômes $A_k = (X - l_k)^{m_k}$, avec $0 \leqslant k \leqslant d$, sont deux à deux premiers entre eux donc, d'après le théorème des noyaux, $\ker A(\sigma) = \bigoplus_{k=0}^{d} \ker(A_k(\sigma))$, c'est-à-dire $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^{d} \mathcal{R}_{A_k}(\mathbb{K})$.

On a vu en C.2) que $\mathcal{R}_{A_0}(\sigma)$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang m_0 (y compris si $m_0 = 0$) et en C.3) que pour $k \in [\![1, d]\!]$, $\mathcal{R}_{A_k}(\sigma)$ est l'ensemble des suites de la forme $n \mapsto Q(n)\,\lambda^n$ avec $Q \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]$. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites de la forme indiquée dans l'énoncé.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n non nul, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.
On identifie toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne qui lui correspond.

II.A - Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre minimal $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.
II.A.1) Montrer que la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Correction : par hypothèse x est un élément de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ et, d'après la question **I.C.1)**, $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est stable par σ. La famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ est bien une famille de vecteurs de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Soit $(\lambda_k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\sigma^k(x) = 0$. On considère alors le polynôme $A = \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k X^k$. Il appartient alors J_x. Comme il vérifie $\deg(A) < \deg(B)$, par définition de B comme polynôme minimal, on en déduit que $A = 0$ c'est à dire, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\lambda_k = 0$. La famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ est alors une famille libre de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

D'après la question **I.C.1)** $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est de dimension p, on en déduit que La famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

On déduit que la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est de rang n si $n \leqslant p$ et p (rang maximal d'une famille) pour $n \geqslant n$.

II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases}\mathcal{R}_B(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K}^n \\ v & \mapsto (v_0, \ldots, v_{n-1})\end{cases}$ est injective.
En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\operatorname{rg}(H_n(x)) = p$.
Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

Correction : Une suite de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par ses p premiers termes, et *a fortiori* par ses n premiers termes (puisque $n \geqslant p$), φ_n est donc injective. D'autre part, φ_n est clairement linéaire.

D'après la question précédente, la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est de rang p donc, par injectivité de φ_n, son image par φ_n est aussi de rang p. Or, $\left(\varphi_n\left(\sigma^k(x)\right)\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est la famille des vecteurs-colonne de $H_n(x)$; par conséquent, $\operatorname{rg}(H_n(x)) = p$.

II.B - Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \operatorname{rg}(H_m(x))$.
II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \ldots, b_{p-1}, 1)$, où $b_0, \ldots, b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.

Correction : On sait que m est supérieur ou égal à l'ordre minimal de x donc, d'après la question **II.A.2)**, le rang de $H_m(x)$, c'est-à-dire p, est égal à l'ordre minimal de x.

Toujours d'après la question **II.A.2)**, $\operatorname{rg}\big(H_{p+1}(x)\big) = p$, donc par le théorème du rang, $\ker\big(H_{p+1}(x)\big)$ est une droite vectorielle. Soit $b = (b_0, \ldots, b_{p-1}, b_p)$ une base de cette droite vectorielle ; si b_p était nul, $(b_0, \ldots, b_{p-1})$ serait un vecteur non nul de $\ker\big(H_p(x)\big)$, ce qui est impossible puisque $H_p(x)$ est inversible ; donc $b_p \neq 0$ et, quitte à remplacer b par b/b_p, on peut supposer que $b_p = 1$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k X^k$.

Correction : L'égalité $H_{p+1}(x)\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ 1\end{pmatrix} = 0$ se traduit par $b_0\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix} + \ldots + b_{p-1}\begin{pmatrix} x_{p-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2p-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2p}\end{pmatrix} = 0$, soit encore par $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k\,\varphi_{p+1}\big(\sigma^k(x)\big) = 0$ (où $b_p = 1$), et enfin par $\displaystyle\varphi_{p+1}\left(\sum_{k=0}^{p} b_k\,\sigma^k(x)\right) = 0$.

Comme φ_{p+1} est injective, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k\,\sigma^k(x) = 0$; le polynôme minimal de x divise donc le polynôme

$B = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$. Ces deux polynômes étant unitaires de degré p, ils sont égaux.

II.C - Etude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$$

II.C.1) Ecrire une fonction en Python de paramètre un entier n et renvoyant la liste des x_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Correction :

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

Correction : on a directement $\operatorname{rg}\big(H_1(x)\big) = \operatorname{rg}\big(H_2(x)\big) = 1$. Par calcul du déterminant on vérifie que $\operatorname{rg}(H_3(x)) = 3$. On calcule $x_4 = -2$ et $x_5 = x_6 = -4$, d'où $H_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

On constate ensuite que $\operatorname{rg}\big(H_4(x)\big) = 3$. Comme x est par construction une suite récurrente linéaire d'ordre 4, la question **II.B.1)** montre que l'ordre minimal de x est 3 et la question **II.A.2)** que $\operatorname{rg}\big(H_n(x)\big) = 3$ pour tout $n \geqslant 3$.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

Correction : On trouve $\ker\big(H_4(x)\big) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, d'après B.1), le polynôme minimal de x est $X^3 - 2X^2 + 2X$ et la relation de récurrence minimale de x est : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - 2x_{n+2} + 2x_{n+1} = 0$.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.

Correction : $X^3 - 2X^2 + 2X = X(X-1-i)(X-1+i)$. On peut appliquer la question **I.D** en prenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on en déduit que, pour $n \geqslant 1$, x_n est de la forme $\alpha(1+i)^n + \beta(1-i)^n$, où α et β sont deux constantes complexes.

Avec $x_1 = x_2 = 1$ on trouve $\alpha = \dfrac{1-i}{4}$ et $\beta = \dfrac{1+i}{4}$ donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \frac{(1-i)(1+i)^n + (1+i)(1-i)^n}{4} = \frac{(1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}}{2} = \Re\big((1+i)^{n-1}\big) = (\sqrt{2})^{n-1}\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$

II.C.5) On décide de modifier uniquement la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \frac{1}{2}$.
Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2)** et **II.C.3)**.

Correction : Changer x_0 ne modifie pas les x_n pour $n \geqslant 1$. La nouvelle suite x appartient donc toujours à $\mathcal{R}_{X^3-2X^2+2X}(\mathbb{K})$.

On a maintenant $H_3(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et on constate que $\operatorname{rg}\big(H_3(x)\big) = 2$.

On en déduit que l'ordre minimal de x est 2 et que $\operatorname{rg}\big(H_n(x)\big) = 2$ pour tout $n \geqslant 2$. Evidemment, $\operatorname{rg}\big(H_1(x)\big) = 1$.

Ensuite, on trouve $\ker\big(H_3(x)\big) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le polynôme minimal de x est $X^2 - 2X + 2$ et sa relation de récurrence minimale est : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
On note $p = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ la partie entière de $\frac{n+1}{2}$.
On a donc $n = 2p$ si n est pair, et $n = 2p - 1$ si n est impair.

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $\left(\cdot \mid \cdot\right)$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.
Un élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *ordonné* s'il vérifie $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$.
On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Hankel s'il existe $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que pour tout i et j de $[\![1, n]\!]$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A - Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \lambda_n$.
On note alors $Spo(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre ordonné de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.
On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?

Correction : une matrice de Hankel réelle est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable.

III.A.2) Montre que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors le n-uplet $(\lambda, \ldots, \lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

Correction : Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que $\mathrm{Spo}\big(H(a)\big) = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$.

Comme $H(a)$ est diagonalisable, on aurait $H(a) = \lambda I_n$, d'où $a_0 = \lambda$ et $a_k = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ d'après la première colonne et $a_2 = \lambda$ d'après la deuxième colonne ; c'est impossible puisque $n \geqslant 3$ et $\lambda \neq 0$.

III.B - Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $Spo(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
On définit deux vecteurs $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\, a_{2(i-1)} & \text{et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} \quad \text{si } i \in [\![1, p]\!] \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1}\, a_{2(i-1)} & \text{et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} \quad \text{si } i \in [\![p+1, n]\!] \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.

III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2$$

Correction : la matrice $H(a)$ étant diagonalisable son polynôme caractéristique est scindé. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}$$

De plus les valeurs propres de $H(a)^2$ sont les λ_i^2 et donc, comme elle est aussi diagonalisable,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\mathrm{tr}\big(M^2\big)=\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}m_{j,i}\Bigg)=\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}a_{i+j-2}^2\Bigg)=\sum_{0\leq i,j\leq n-1}a_{i+j}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}l_i^2=\sum_{k=0}^{2n-2}\Bigg(\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n-1\\ i+j=k}}a_k^2\Bigg)=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k^2+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2$$

.

(En effet, pour $k\in[[0,\,n-1]]$ (resp. $k\in[\![n,2n-2]\!]$), il existe $k+1$ (resp. $2n-k-1$) couples $(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2$ tels que $i+j=k$.)

III.B.2) Montrer que $\big(v\mid w\big)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ et $\|v\|^2\leqslant\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$.

Correction : On a $\big(v\mid w\big)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}v_iw_i=\sum_{i=1}^{n}a_{2i-2}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ d'après la question **B.1)**.

On de plus $\|v\|^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{p}(2i-1)\,a_{2i-2}^2+\sum_{i=p+1}^{n}(2n-2i+1)\,a_{2i-2}^2=\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\,a_{2i}^2+\sum_{i=p}^{n-1}(2n-2i-1)\,a_{2i}^2$

$\leq\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2}(k+1)\,a_k^2+\sum_{k=2p}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2\leq\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k^2+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2=\sum_{i=1}^{n}l_i^2$ d'après B.1).

(La première majoration est grossière (on a ajouté les termes d'indice impair, qui sont positifs) et la seconde est justifiée par les inégalités $2p-2\leq n-1$ et $2p\geq n$.)

III.B.3) Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\big(v\mid w\big)^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\geqslant K_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\quad\textbf{(III.1)}$$

Correction :
$\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\lambda_i^2+\lambda_j^2-2\lambda_i\lambda_j)=\frac{1}{2}\Bigg(n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+n\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Bigg)$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Bigg)^2=n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\big(v\mid w\big)^2\ \text{ d'après l'égalité du B.2).}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité du B.2) donnent alors :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\geqslant n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\|v\|^2\|w\|^2\geqslant n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\Bigg)\|w\|^2=K_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

III.B.4) Vérifier que si $n=3$, la condition **(III.1)** équivaut à : $1\,(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\geqslant 3\,(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$.

Correction : Pour $n=3$, $\|w\|^2=1+\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{7}{3}$ et l'inégalité (III.1) devient $(\lambda_2-\lambda_1)^2+(\lambda_3-\lambda_1)^2+(\lambda_3-\lambda_2)^2\geqslant\dfrac{2}{3}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$, ce qui se réécrit $2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\geqslant 3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$ après développement et regroupement.

III.C - D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on admet le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dont les propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ et $\beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n+1-i} \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \quad \textbf{(III.2)}$$

Soit $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{1,2p-1} = 1 \quad b_{2p-1,1} = 1 \quad b_{p,p} = -2$$

tous les autres coefficients de B étant nuls.

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

Correction : B est diagonalisable et $\operatorname{rg}(B) = 3$ de façon immédiate donc, d'après le théorème du rang, 0 est valeur propre de B d'ordre $n-3$ (si $n \geqslant 4$).

D'autre part, en notant $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BE_p = -2E_p$,, $B(E_1+E_{2p-1}) = E_1+E_{2p-1}$ et $B(E_1-E_{2p-1}) = -(E_1-E_{2p-1})$ donc le spectre ordonné de B est $(1,0,\ldots,0,-1,-2)$.

III.C.2) Soit $a = (a_0,\ldots,a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$.

On note $Spo(M) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Etablir que

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant 0 \quad \textbf{(III.3)}$$

Correction : Les seules colonnes de MB éventuellement non nulles sont les colonnes $1, p$ et $2p-1$ et les termes diagonaux correspondants sont $a_{2p-2}, -2a_{2p-2}$ et a_{2p-2}, donc $\operatorname{tr}(MB) = 0$.

L'application de (III.2) à M et B donne alors $-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_n \leqslant 0 \leqslant \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n$.

III.D - Cas $n = 3$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels vérifiant :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geqslant 0, \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geqslant 0$$

On définit la matrice de Hankel $M = H(a,b,c,b,a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

Correction : On remarque que $a-c$ est valeur propre de M associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela va permettre de factoriser χ_M.

$\chi_M = X^3 - (2a+c)X^2 + (a^2 - 2b^2 - c^2 + 2ac)X + c^3 + 2ab^2 - a^2c - 2b^2c = (X - a + c)\big(X^2 - (a+2c)X - 2b^2 + c^2 + ac\big)$. On en déduit les valeurs propres de M : $a-c$, $\dfrac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$ et $\dfrac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$.

III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b \geqslant 0$) en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de telle sorte que $Spo(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Correction : Cherchons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2} = \lambda_1$, $a-c = \lambda_2$ et $\dfrac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$ λ_3.

Cela équivaut à $\begin{cases} a+2c & = \lambda_1+\lambda_3 \\ a-c & = \lambda_2 \\ \sqrt{a^2+8b^2} & = \lambda_1-\lambda_3 \end{cases}$ ou encore à $\begin{cases} a & = \dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ c & = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ b^2 & = \dfrac{9(\lambda_1-\lambda_3)^2-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)^2}{72} \end{cases}$

De plus, $9(\lambda_1-\lambda_3)^2-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)^2 = \big(3(\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\big)\big(3(\lambda_1-\lambda_3)-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\big)$
$= 4(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3) \geq 0,$ d'après les hypothèses.

Le système étudié possède donc une unique solution telle que $b \geqslant 0$.

III.D.3) Que peut-on déduire de résultat précédent, quand à la condition **(III.3)** dans le cas $n=3$? En utilisant un triplet ordonné $(\lambda,1,1)$, montrer que pour $n=3$, la condition **(III.1)** n'est pas suffisante.

Correction : On déduit du D.2) que lorsque $n=3$, (III.3) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice de Hankel de spectre ordonné $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Pour montrer que la condition (III.1) n'est pas suffisante, il suffit de prouver l'existence d'un réel $\lambda \geqslant 1$ tel que $(\lambda,1,1)$ vérifie (III.1) mais pas (III.3). Cela conduit au système $\begin{cases} 2\lambda^2-6\lambda+1 \geqslant 0 \\ 1 \leqslant \lambda < 3 \end{cases}$.

Comme $2\lambda^2-6\lambda+1$ vaut 1 pour $\lambda=3$, tout réel λ strictement inférieur à 3 et assez proche de 3 est solution du système précédent.