Devoir libre n° 2 bis

MP Clemenceau 2022-23

Sujet de type Centrale

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matices de Hankel).

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.
On note σ l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui, à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monômes de plus haut degré vaut 1.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si M est une matrice carrée, on note ${}^tM$ sa transposée et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.
Pour tout f de $\mathscr{L}(E)$, et tout $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$).
Pour tout f de $\mathscr{L}(E)$, l'application $A \mapsto A(f)$ est alors un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$.

On a en particulier (utile dans la suite du problème) :

- Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = \sigma$ et $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors $A(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$.
- Pour tout $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y = A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel. On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire d'ordre* $p \geqslant 0$, s'il existe un polynôme $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit nulle, c'est à dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = 0 \qquad \textbf{(I.1)}$$

On dit que la relation **(I.1)** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire d'ordre p, dont A est un *polynôme caractéristique*.
L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **(I.1)** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quelque soit leur ordre.

I.A - Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.
Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un sous groupe de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à 0 et tel que pour tout $(A, B) \in J_x \times \mathbb{K}[x]$, AB est élément de J_x (autrement dit, J_x est un idéal de $K[X]$).

On rappelle qu'il en résulte deux choses :

- d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal
- d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est *l'ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B - Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X - 1)^2$?
I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.
Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x_n.

I.C - L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p \geqslant 0$, que, sans perdre de généralité, on suppose unitaire.
I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).
I.C.2) Déterminer $(R)_A(\mathbb{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geqslant 1$) et en donner une base.
I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geqslant 1$ et $A = (X - \lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.
On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.

a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.

b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$.

I.D - Etude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod\limits_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)^{m_k}$, où :

- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ sont les racines non nulles distinctes éventuelles de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod\limits_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)^{m_k} = 1$.

- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine éventuelle de A. Si 0 n'est pas racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum\limits_{k=0}^{d} m_k = \deg(A) = p$.
En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0, \quad x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$$

où, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg(Q_k) < m_k$.
Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum\limits_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n non nul, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.
On identifie toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne qui lui correspond.

II.A - Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre minimal $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.
II.A.1) Montrer que la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.
II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K}^n \\ v & \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1}) \end{cases}$ est injective.
En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\operatorname{rg}(H_n(x)) = p$.
Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B - Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \operatorname{rg}(H_m(x))$.
II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$, où $b_0, \dots, b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.
II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + \sum\limits_{k=0}^{p-1} b_k X^k$.

II.C - Etude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$$

II.C.1) Ecrire une fonction en Python de paramètre un entier n et renvoyant la liste des x_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.
II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.
II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.
II.C.5) On décide de modifier uniquement la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \frac{1}{2}$.
Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2)** et **II.C.3)**.

Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
On note $p = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ la partie entière de $\frac{n+1}{2}$.
On a donc $n = 2p$ si n est pair, et $n = 2p - 1$ si n est impair.

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $(\cdot \mid \cdot)$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.
Un élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *ordonné* s'il vérifie $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$.
On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Hankel s'il existe $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que pour tout i et j de $[\![1,n]\!]$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A - Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \lambda_n$.
On note alors $Spo(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre ordonné de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.
On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?
III.A.2) Montre que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors le n-uplet $(\lambda, \ldots, \lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

III.B - Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $Spo(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
On définit deux vecteurs $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\, a_{2(i-1)} & \text{et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} \quad \text{si } i \in [\![1,p]\!] \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1}\, a_{2(i-1)} & \text{et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} \quad \text{si } i \in [\![p+1,n]\!] \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.
III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2$$

III.B.2) Montrer que $(v \mid w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\|v\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

III.B.3) Montrer que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - (v \mid w)^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant K_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad \textbf{(III.1)}$$

III.B.4) Vérifier que si $n = 3$, la condition **(III.1)** équivaut à : $1\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geqslant 3\,(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$.

III.C - D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on admet le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dont les propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ et $\beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n+1-i} \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \quad \textbf{(III.2)}$$

Soit $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{1,2p-1} = 1 \quad b_{2p-1,1} = 1 \quad b_{p,p} = -2$$

tous les autres coefficients de B étant nuls.
III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.
III.C.2) Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$.
On note $Spo(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Etablir que

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant 0 \quad \textbf{(III.3)}$$

III.D - Cas $n = 3$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels vérifiant :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geqslant 0, \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geqslant 0$$

On définit la matrice de Hankel $M = H(a,b,c,b,a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).
III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b \geqslant 0$) en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de telle sorte que $Spo(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
III.D.3) Que peut-on déduire de résultat précédent, quand à la condition **(III.3)** dans le cas $n = 3$?
En utilisant un triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$, montrer que pour $n = 3$, la condition **(III.1)** n'est pas suffisante.