Correction : Devoir libre n° 2

MP Clemenceau 2022-23

UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Notations et définitions :

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel.
Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u^n \circ u$.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathscr{M}_n(K)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ de matrice unité I_n et $\mathscr{G}l_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(K)$; les éléments de $\mathscr{M}_n(K)$ sont notés $M = (m_{i,j})$.
Pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(K)$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}\,(A)$ son rang, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}\,A$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $K_n[X]$ on lui associe

$$\text{la } \textbf{matrice compagnon } C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -a_2 \\ & & & & & \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II. III. et IV. utilisent les résultats de la partie I. et sont indépendantes entre elles.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1) Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

Correction : on calcule le déterminant de C_P, en développant par rapport à la première ligne on trouve $\det(C_P) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

2) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P.

Correction : Calculs déjà abordés en cours, on trouve $\chi_{C_P} = P$:
plusieurs méthodes possibles

- on développe suivant la dernière colonne $\chi_{C_P}(\lambda) = \det(\lambda I_n - C_P)$

$$\det(\lambda I_n - C_P) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{i-1} \Delta_i + (\lambda + a_{n-1}) \Delta_n$$

avec $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$, et pour $i \in [\![2, n-1]\!]$,

$\Delta_i = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & & (0) & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ (0) & & -1 & \lambda & & & & \\ & & & & -1 & \lambda & & (0) \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ & & & & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$, le premier bloc étant de taille $i-1$ et le second $n-i$. On a alors $\Delta_1 = (-1)^{n-1}$, $\Delta_n = \lambda^{n-1}$, et pour $i \in [\![2, n-1]\!]$, $\Delta_i = \lambda^{i-1}(-1)^{n-i}$. En mettant ces résultats dans $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{i-1}\Delta_i + (\lambda + a_{n-1})\Delta_n$ on trouve le résultat.

- On développe suivant la première ligne

$$\det(\lambda I_n - C_P) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & \lambda & \ddots & & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_0 \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et on procède par récurrence pour obtenir le résultat écrit sous la forme de l'algorithme d'Hörner.

- Autre méthode : on fait l'opération $L_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1} L_i \to L_1$. On obtient alors

$$\det(\lambda I_n - C_P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \lambda & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Il suffit alors de développer suivant la première ligne pour trouver le résultat.

3) Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

Correction : d'après la question précédente il faut et il suffit qu'il soit unitaire.

4) On note ${}^tC_P$ la transposée de la matrice C_P.

(a) Justifier la proposition : $\operatorname{Sp} C_P = \operatorname{Sp} {}^tC_P$.

Correction : Par propriété sur le déterminant, $\det(A) = \det({}^tA)$, les polynômes caractéristiques de C_P et ${}^tC_P$ sont identiques donc les spectres aussi.

(b) Soit λ élément de Sp ${}^tC_P$, déterminer le sous-espace propre de ${}^tC_P$ associé à λ.

Correction : on a ${}^tC_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$; si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vient le système

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i-1} x_i & = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \lambda^{i-1} x_1, \forall i = [\![1, n]\!] \\ -\sum\limits_{i=n}^{n} a_i \lambda^i x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

(c) Montrer que ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Correction : D'après la question précédente tous les sous espaces propres sont de dimension 1. La matrice est donc diagonalisable si et seulement si toutes les valeurs propres sont simples c'est à dire que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

(d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${}^tC_P$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est non nul, sans utiliser sa formule.

Correction : si P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes alors il est scindé à racines simples et donc, d'après la question précédente, ${}^tC_P$ est diagonalisable. De plus, d'après la question **4d)** la matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Elle est alors inversible, c'est à dire que son déterminant est non nul.

5) *Exemples :*

(a) Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_n.$$

Correction : A n'est pas unique. On peut s'intéresser à la matrice compagnon de taille 2002 associée au polynôme $P = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$ et conclure par le théorème de Cayley-Hamilton, ou alors voir que ce polynôme possède au moins une racine réelle λ (la valeur en 0 est négative et il tend vers $+\infty$ en $+\infty$), la matrice λI_n, quelque soit la valeur de n, convient alors.

(b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1}\neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

Correction : Remarque : bien qu'on peut penser que la matrice compagnon de X^n, qui est le polynôme caractéristique de tout endomorphisme nilpotent de $\mathbb{K}^n$, peut être le résultat, une matrice nilpotente n'est pas toujours semblable à cette matrice compagnon. Ici il faut trouver la base qui permettra de le dire.

Par hypothèse $f^{n-1} \neq 0$, il existe donc $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$. Montrer alors que la famille $(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est libre et donc que c'est une base de E. Dans cette base la matrice de f est la matrice compagnon de X^n.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1\leq i\leq n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i\}.$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

6) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

Montrer que pour tout entier $1\leqslant i\leqslant n$: $|\lambda x_i| \leqslant r_i \|X\|_\infty$.

Correction : par définition du vecteur propre on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k$. On a alors, par inégalité triangulaire et définition de la norme infinie :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |\lambda x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\, |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\, \|X\|_\infty \leqslant r_i \|X\|_\infty$$

7) Démontrer que $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.

Correction : avec les notations de la question précédente, si X est un vecteur propre associé à λ alors il est non nul et donc $\|X\|_\infty \neq 0$. De plus il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$, tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$. L'inégalité de la question précédente pour $i = i_0$ est alors $|\lambda|\, |x_{i_0}| \leqslant r_{i_0} |x_{i_0}|$. On en déduit que $|\lambda| \leqslant r_{i_0}$ et donc $\lambda \in D_{i_0}$. Par suite $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.

8) Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

Correction : les racines de P sont les valeurs propres de la matrice compagnon C_p. Pour $A = C_P$, on a $r_1 = |a_0|$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $r_i = 1 + |a_{i-1}|$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $D_i \subset \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} (r_i) \right\}$. On en déduit le résultat souhaité.

9) *Application :*

Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Correction : sans perte de généralité on peut supposer que $a = \max\{a, b, c, d\}$. On considère alors le polynôme $P = X^a + X^b - X^c - X^d$. D'après la question précédente ses racines sont dans la boule de centre 0 et de rayon 2 car ici $a_0 = 0$ et pour tout $i \in [\![1, a]\!]$, $a_i \in \{0, 1\}$. On en déduit que les seuls entiers possibles sont 0, 1 et 2.

Si 2 est racine de ce polynôme on a $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$. Soit $e = \min\{a, b, c, d\}$, on a alors $2^{a-e} + 2^{b-e} = 2^{c-e} + 2^{d-e}$. Comme les quatre nombres sont distincts, une et une seule puissance est nulle et les autres sont strictement positives. Donc l'un des membres de l'égalité est impair pendant que l'autre est pair. C'est absurde, donc 2 n'est pas solution de l'équation.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u.

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0u(n).$$

10) Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.

Correction : soit λ une racine de P, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} = \lambda^{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \lambda^{n+k} = \lambda^n P(\lambda) = 0$$

On en déduit que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien un élément de F.

11) Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

Correction : φ est clairement linéaire. De plus une suite récurrente linéaire d'ordre p est entièrement définie par ses p premières valeurs. Donc φ est bijective. C'est donc un isomorphisme d'espace vectoriel. Et par suite $\dim(F) = p$.

12) Pour tout entier $i \in [\![0, p-1]\!]$ on définit les élements e_i de F par :

$$e_i(i) = 1 \text{ et, lorsque } 0 \leqslant j \leqslant p-1 \text{ et } j \neq i,\ e_i(j) = 0.$$

(a) Déterminer pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, $e_i(p)$.

Correction : soit $i \in [\![1, p-1]\!]$, en appliquant la relation de récurrence à e_i pour $n = 0$, obtient directement que $e_i(p) = -a_i$.

(b) Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est une base de F.

Correction : soit $(b_k)_{k\in[\![1,p-1]\!]} \in \mathbb{C}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} b_k e_k = 0$.

On considère alors cette égalité au rang $i \in [\![1, p-1]\!]$. Par définition des e_k on obtient alors $b_i = 0$. La famille est donc libre, de même cardinal que la dimension de F, c'est donc une base de F.

(c) Soit u un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

Correction : soit u un élément de F. Comme $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est une base de F, il existe $(b_k)_{k\in[\![1,p-1]\!]} \in \mathbb{C}^p$ tel que $u \sum_{k=0}^{p-1} b_k e_k$. On applique cette égalité au rang $i \in [\![1, p-1]\!]$ et on trouve, par définition des e_i, que $b_i = u(u)$.

13) Si u est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f.

Correction : l'application f définie par, pour $u \in E$: $f(u) : n \mapsto u(n+1)$ est clairement linéaire et l'espace image est bien E. C'est donc bien un endomorphisme de E.

Soit $u \in F$, pour tout entier n, $u_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} = 0$. En considérant cette égalité au rang $n+1$ on a alors $u_{n+1+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k+1} = 0$, c'est à dire $f(u)_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k f(u)_{n+k} = 0$. On en déduit que $f(u)$ est un élément de F, donc F est stable par f.

Remarque : on peut aussi dire que

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} = 0 \iff f^p(u) + \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(u) \iff P(f)(u) = 0$$

on a donc que $F = \ker(P(f))$, or f et $P(f)$ commutent donc F est stable par f.

14) Si g est l'endomorphisme de F induit par f, montrer que la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est ${}^tC_P$.

Correction : par définition pour $j \in [\![0, p-1]\!]$, $e_j(j) = 1$ et, pour $i \in [\![0, p-1]\!] \setminus \{j\}$ $e_j(i) = 0$. D'après la question **12a)** : pour $j \in [\![0, p-1]\!]$ $e_j(p) = -a_j$. On utilise alors la définition de f et la question **12b)** :

$$j \in [\![0, p-1]\!] \quad f(e_j) = \sum_{i=0}^{p-1} f(e_j)(i)e_i = \sum_{i=0}^{p-1} e_j(i+1)e_i$$

On a alors $f(e_0) = -a_0 e_{p-1}$ et, pour $j \in [\![1, p-1]\!]$, $f(e_j) = e_{j-1} - a_j e_{p-1}$. On en déduit que a matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est ${}^tC_P$.

15) On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : λ_0, λ_1, …, λ_{p-1}.

(a) Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.

Correction : d'après la question **4c)**, comme P est scindé à racines simples, ${}^tC_P$ est diagonalisable.

D'après la question **10)**, pour λ_i racine de P, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un élément de F. C'est de plus clairement un vecteur propre de g, donc $\left((\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_{p-1}^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de F constituée de vecteurs propres de g.

Remarque : avec la convention $0^0 = 1$ pour le premier terme d'une suite géométrique, la condition de non nullité de λ_i est inutile.

(b) En déduire que, si u est élément de F, il existe des constantes complexes k_0, k_1, ..., k_{p-1} telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$.

Correction : c'est tout simplement l'écriture de la suite dans la base de la question précédente.

16) *Exemple :* (On revient à la notation usuelle u_n)

Soit a, b et c trois réels distincts.

Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc.$$

Correction : ici on a $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$.

On en déduit, d'après la question précédente qu'une base de l'espace cherché est $\left((a^n)_{n\in\mathbb{N}}, (b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (c^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

IV. Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}\,(U-V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera C_A la matrice compagnon du polynôme χ_A.

17) Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_A ?

Correction : d'après la question **3)**, une matrice compagnon d'un polynôme A est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est scindé à racines simples. Pour une matrice diagonale D dont le polynôme caractéristique est scindé mais à racines multiples, la matrice compagnon n'est pas diagonalisable. Elle n'est donc pas semblable à D.

Autre méthode : une matrice compagnon est de rang supérieur ou égal à $n-1$, donc si la matrice de départ est de rang strictement inférieur à $n-1$ ne sera pas semblable à la matrice compagnon de son polynôme caractéristique.

Pour tout couple (U, V) de matrices de $\mathscr{G}l_n(K)$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(*) : $\mathrm{rg}\,(U-V) = 1$

(**) : Il existe une matrice inversible P telle que $U = P^{-1}C_UP$ et $V = P^{-1}C_VP$.

18) Montrer qu'un couple (U, V) de matrices distinctes de $\mathscr{G}l_n(K)$ vérifiant (**) vérifie (*).

Correction : Soit (U, V) un couple de matrices distinctes de $\mathscr{G}l_n(K)$ vérifiant (**). On a alors $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$. La matrice $C_U - C_V$ est une matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf peut être la dernière. Si celle-ci est nulle alors $U = V$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. La dernière colonne de $C_U - C_V$ est donc non nulle et donc cette matrice est de rang 1. Par suite, comme elle est semblable à $U - V$, $U - V$ est aussi de rang 1.

19) Déterminer un couple (U, V) de matrices de $\mathscr{G}l_2(K)$ $(n = 2)$ vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V.

Correction : on considère $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices sont bien inversibles (triangulaires de diagonale non nulle), vérifient $U - V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est une matrice de rang 1. Comme elles ont même polynôme caractéristique elles ne vérifient pas (**) sinon elles seraient égales.

Le plus grand diviseur commun des polynômes χ_U et χ_V est $(X-2)^2$.

Dans la suite de cette partie, (U, V) est un couple de matrices de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ vérifiant (*) et tel que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et de base B, on désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B.

Enfin on pose $H = \ker(u - v)$.

20) Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.

Correction : par hypothèse $rg(u - v) = 1$, on en déduit d'après le théorème du rang que $dim(H) = dim(\ker(u - v)) = n - 1$. H est donc un hyperplan de E.

21) Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et par v c'est-à-dire :

$$u(F) \subset F \text{ et } v(F) \subset F.$$

On notera u_F (respectivement v_F) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F.

On rappelle que χ_{u_F} divise χ_u.

(a) Montrer que F n'est pas inclus dans H.

Correction : si on suppose que $F \subset H$, alors pour tout $x \in F$, $u(x) = v(x)$. Dans ce cas $u_F = v_F$ et donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F)}$. Or χ_{u_F} divise χ_u et est non constant. On a alors un diviseur commun entre χ_u et χ_v, ce qui contredit l'hypothèse du problème. Donc F n'est pas inclus dans H.

(b) On suppose que $F \neq E$, montrer que $F + H = E$ puis que l'on peut compléter une base B_F de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E. En utilisant les matrices de u et v dans la base B' montrer que l'on aboutit à une contradiction.

Correction : on suppose que $F \neq E$. D'après la question précédente F n'est pas inclus dans E, il existe donc un vecteur de F (non nul) qui n'est pas dans H. Comme H est un hyperplan, on a alors $H \oplus \mathbb{K}x = E$. Comme $\mathbb{K}x \subset F$ on en déduit que $H + F = E$.

Soit BF une base de F et $B(H)$ une base de H. La famille $B(f) \cup B(H)$ est alors une famille génératrice de E. Comme $B(F)$ est une famille libre de cette famille, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $B(F)$ à l'aide de vecteurs de $B(f) \cup B(H)$, donc de $B(H)$ pour avoir une base de E.

F est stable par u et v, de plus u et v coïncident sur H, les matrices respectives de u et v dans la base B' sont alors de la forme $\begin{pmatrix} U_F & A \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} V_F & A \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec C une matrice carrée de taille supérieure à 1 car $\dim(F) < \dim(E)$. Dans ce cas χ_C divise χ_u et χ_v, ce qui contredit le fait qu'ils soient premiers entre eux.

(c) Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?

Correction : d'après ce qui précède les seuls sous-espaces stables par u et par v sont $\{0\}$ et E.

22) Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $G_j = \{x \in E, u^j(x) \in H\}$.

(a) Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E.

Correction : par hypothèse u est inversible, on a donc que $\dim(u^{-1}(H)) = \dim(H)$, or on a, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $G_j = u^{-j}(H)$ donc G_j est un hyperplan de E.

(b) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

Correction : pour tout $j \in \mathbb{N}$, G_j étant un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle φ_j telle que $G_j = \ker(\varphi_j)$. On a alors $\dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j\right) = \dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} \ker(\varphi_j\right) = n - \operatorname{rg}(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2})$. Or on a $\operatorname{rg}(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2}) \leqslant n-1$ (nombre de forme linéaire), d'où $\dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j\right) \geqslant 1$.

On en déduit que $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

(c) Soit y un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$: $e_j = u^j(y)$.

Montrer que $B'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de E.

(On pourra considérer $F = \operatorname{Vect}\{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ est libre).

Correction : soit y un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$: $e_j = u^j(y)$. L'ensemble $\{p \in \mathbb{N}^*/(e_0, \dots, e_{p-1}) \text{ libre}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par la dimension de E, elle admet un plus grand élément p. Supposons que $p < n$. On pose alors $F = \operatorname{Vect}(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$. Par hypothèse y, pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, $u^j(y)$ est un élément de H. On en déduit que F est inclus dans H. Ceci permet de dire que u et v coïncident sur F. On a de plus que, comme $(y, \dots, u^{p-1}(y))$ est libre, et, par définition de p, $(y, \dots, u^p(y))$ est liée, $u^p(y)$ est combinaison linéaire de $(y, \dots, u^{p-1}(y))$, donc élément de F. On en déduit que F est stable par u, et par suite aussi par v.

On a alors contradiction avec le résultat de la question **21c)**.

Donc $p = n$ et $B'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de E.

(d) Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_U (respectivement C_V).

Correction : dans la base B'' la matrice de u est de la forme d'une matrice compagnon, donc par unicité dur polynôme caractéristique on a que la matrice de u dans B'' est C_U. Comme u et v coïncident sur les $n-1$ premiers vecteurs on a aussi que la matrice de v dans B'' est C_V.

(e) Conclure.

Correction : si on note P la matrice de passage de B'' à B, celle-ci permet de dire que la propriété (**) est vérifiée.