

# Devoir libre n° 2

MP Clemenceau 2022-23

## UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

### Notations et définitions :

Dans tout le problème  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  est un entier naturel.

Si  $u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on note  $u^0 = id_E$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u^n \circ u$ .

On note  $\mathbb{K}_n[X]$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ ,  $\mathcal{M}_n(K)$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de matrice unité  $I_n$  et  $\mathcal{G}_n(K)$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(K)$ ; les éléments de  $\mathcal{M}_n(K)$  sont notés  $M = (m_{i,j})$ .

Pour une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(K)$ , on note  ${}^tA$  la transposée de la matrice  $A$ ,  $\text{rg}(A)$  son rang,  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  son polynôme caractéristique et  $\text{Sp } A$  l'ensemble de ses valeurs propres.

Si  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  est un polynôme unitaire de  $\mathbb{K}_n[X]$  on lui associe

$$\text{la matrice compagnon } C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

(c'est-à-dire la matrice  $C_P = (c_{i,j})$  est définie par  $c_{i,j} = 1$  pour  $i - j = 1$ ,  $c_{i,n} = -a_{i-1}$  et  $c_{i,j} = 0$  dans les autres cas).

*Les parties II. III. et IV. utilisent les résultats de la partie I. et sont indépendantes entre elles.*

## I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $C_P$  sa matrice compagnon associée.

- 1) Montrer que  $C_P$  est inversible si et seulement si  $P(0) \neq 0$ .
- 2) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $C_P$ .
- 3) Soit  $Q$  un polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$ , déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\chi_A = Q$ .
- 4) On note  ${}^tC_P$  la transposée de la matrice  $C_P$ .
  - (a) Justifier la proposition :  $\text{Sp } C_P = \text{Sp } {}^tC_P$ .
  - (b) Soit  $\lambda$  élément de  $\text{Sp } {}^tC_P$ , déterminer le sous-espace propre de  ${}^tC_P$  associé à  $\lambda$ .
  - (c) Montrer que  ${}^tC_P$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et a toutes ses racines simples.

(d) On suppose que  $P$  admet  $n$  racines  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes, montrer que  ${}^t C_P$  est

$$\begin{array}{l} \text{diagonalisable et en d\u00e9duire que le d\u00e9terminant de Vandermonde} \\ \left. \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{array} \right\} \end{array}$$

est non nul, sans utiliser sa formule.

5) *Exemples :*

(a) D\u00e9terminer une matrice  $A$  (dont on pr\u00e9cisera la taille  $n$ ) v\u00e9rifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999I_n.$$

(b) Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  v\u00e9rifiant :  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$  ; montrer que l'on peut trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est une matrice compagnon que l'on d\u00e9terminera.

## II. Localisation des racines d'un polyn\u00f4me

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose pour tout entier  $1 \leq i \leq n$  :

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i\}.$$

Pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , on note  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

6) Soit  $\lambda \in \text{Sp } A$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre associ\u00e9 \u00e0  $\lambda$ .

Montrer que pour tout entier  $1 \leq i \leq n$  :  $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$ .

7) D\u00e9montrer que  $\text{Sp } A \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ .

8) Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polyn\u00f4me de  $\mathbb{C}[X]$ , \u00e9tablir que toutes les racines de  $P$  sont dans le disque ferm\u00e9 de centre 0 et de rayon  $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$ .

9) *Application :*

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'\u00e9quation d'inconnue  $n$  :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

## III. Suites r\u00e9currentes lin\u00e9aires

On note  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites de complexes et si  $u$  est une suite de  $E$ , on \u00e9crit  $u(n)$  \u00e0 la place de  $u_n$  pour d\u00e9signer l'image de  $n$  par  $u$ .

On consid\u00e8re le polyn\u00f4me  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$  de  $\mathbb{C}[X]$  avec  $a_0 \neq 0$  et on lui associe le sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  form\u00e9 des \u00e9l\u00e9ments  $u$  v\u00e9rifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \dots - a_0u(n).$$

- 10) Montrer que si  $\lambda$  est racine de  $P$  alors la suite  $n \mapsto \lambda^n$  est élément de  $F$ .
- 11) Soit  $\varphi$  l'application de  $F$  vers  $\mathbb{C}^p$  définie par :  $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$ , montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de  $F$  ?
- 12) Pour tout entier  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  on définit les éléments  $e_i$  de  $F$  par :  
 $e_i(i) = 1$  et, lorsque  $0 \leq j \leq p-1$  et  $j \neq i$ ,  $e_i(j) = 0$ .
- (a) Déterminer pour  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $e_i(p)$ .
- (b) Montrer que le système de vecteurs  $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$  est une base de  $F$ .
- (c) Soit  $u$  un élément de  $F$ , établir que  $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$ .
- 13) Si  $u$  est un élément de  $E$ , on définit l'élément  $f(u)$  de  $E$  par :  $f(u) : n \mapsto u(n+1)$ . Montrer que l'application  $f$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E$  et que  $F$  est stable par  $f$ .
- 14) Si  $g$  est l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$ , montrer que la matrice de  $g$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$  est  ${}^t C_P$ .
- 15) On suppose que  $P$  admet  $p$  racines non nulles et deux à deux distinctes :  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ .
- (a) Déterminer une base de  $F$  formée de vecteurs propres de  $g$ .
- (b) En déduire que, si  $u$  est élément de  $F$ , il existe des constantes complexes  $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$  telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0 \lambda_0^n + k_1 \lambda_1^n + \dots + k_{p-1} \lambda_{p-1}^n$ .
- 16) *Exemple* : (On revient à la notation usuelle  $u_n$ )

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts.

Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par  $u_0, u_1$  et  $u_2$  et par la relation de récurrence valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+3} = (a + b + c)u_{n+2} - (ab + ac + bc)u_{n+1} + abc.$$

#### IV. Matrices vérifiant : $\text{rg}(U - V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice  $A$ , on notera  $C_A$  la matrice compagnon du polynôme  $\chi_A$ .

- 17) Une matrice  $A$  est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon  $C_A$  ?  
 Pour tout couple  $(U, V)$  de matrices de  $\mathcal{G}_n(K)$ , on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :
- (\*) :  $\text{rg}(U - V) = 1$   
 (\*\*) : Il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $U = P^{-1}C_U P$  et  $V = P^{-1}C_V P$ .
- 18) Montrer qu'un couple  $(U, V)$  de matrices distinctes de  $\mathcal{G}_n(K)$  vérifiant (\*\*) vérifie (\*).
- 19) Déterminer un couple  $(U, V)$  de matrices de  $\mathcal{G}_2(K)$  ( $n = 2$ ) vérifiant (\*) mais ne vérifiant pas (\*\*) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes  $\chi_U$  et  $\chi_V$ .

Dans la suite de cette partie,  $(U, V)$  est un couple de matrices de  $\mathcal{G}_n(K)$  vérifiant (\*) et tel que  $\chi_U$  et  $\chi_V$  sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et de base  $B$ , on désigne par  $u$  et  $v$  les automorphismes de  $E$  tels que  $U$  (respectivement  $V$ ) soit la matrice de  $u$  (respectivement  $v$ ) dans la base  $B$ .

Enfin on pose  $H = \ker(u - v)$ .

**20)** Montrer que  $H$  est un hyperplan vectoriel de  $E$ .

**21)** Soit  $F \neq \{0\}$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  et par  $v$  c'est-à-dire :

$$u(F) \subset F \text{ et } v(F) \subset F.$$

On notera  $u_F$  (respectivement  $v_F$ ) l'endomorphisme induit par  $u$  (respectivement  $v$ ) sur  $F$ .

On rappelle que  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$ .

(a) Montrer que  $F$  n'est pas inclus dans  $H$ .

(b) On suppose que  $F \neq E$ , montrer que  $F + H = E$  puis que l'on peut compléter une base  $B_F$  de  $F$  par des vecteurs de  $H$  pour obtenir une base  $B'$  de  $E$ . En utilisant les matrices de  $u$  et  $v$  dans la base  $B'$  montrer que l'on aboutit à une contradiction.

(c) Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par  $u$  et par  $v$  ?

**22)** Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $G_j = \{x \in E, u^j(x) \in H\}$ .

(a) Montrer que les sous-espaces  $G_j$  sont des hyperplans vectoriels de  $E$ .

(b) Montrer que  $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$ .

(c) Soit  $y$  un vecteur non nul de  $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$ , on pose pour  $0 \leq j \leq n-1$  :  $e_j = u^j(y)$ .

Montrer que  $B'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base de  $E$ .

(On pourra considérer  $F = \text{Vect}\{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$  où  $p$  est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille  $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$  est libre).

(d) Montrer que la matrice de  $u$  (respectivement  $v$ ) dans  $B''$  est  $C_U$  (respectivement  $C_V$ ).

(e) Conclure.