# **Correction :** Devoir libre n°1

MP Clemenceau 2024-25

pour le mardi 5 novembre 2024 à 12h

**Vous devez rédiger ce que vous voulez**

La partie I de ce problème permet de démontrer quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents et aborde l'étude de cas particuliers qui seront généralisés dans la partie II.

**Notations et rappels**

Dans tout le sujet, $n$ désigne un entier naturel non nul et $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$.

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M^T$ la transposée de $M$.

Si $M$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de $M$ par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel $k$, par la relation $M^{k+1} = M\,M^k$.

De même, si $u$ est un endomorphisme de $E$, on définit la suite des puissances de $u$ par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel $k$, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice $M$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de $M$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$, un endomorphisme de $E$ est nilpotent d'indice $p$ si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice $p$.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

## I Premiers résultats

**1)** Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

**Correction :** Soit un endomorphisme nilpotent d'indice 1, alors $u = u^1 = 0$.
$\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul.}}$

### I.A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

**2)** Montrer qu'il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

**Correction :** L'endomorphisme $u$ est nilpotent d'indice $p \geq 2$. $p$ est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$. Donc $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ (sinon cela contredirait la minimalité de l'entier $p$).
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\boxed{\text{il existe un vecteur } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$

**3)** Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

**Correction :** L'endomorphisme $u$ est nilpotent d'indice $p \geq 2$. Puisque $u^p = 0$, on a également $\boxed{\forall k \geqslant p, u^k = 0.}$
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme $u^{p-1}$ à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme $u^{p-2}$ à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_2 u^2(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- ...
- En itérant le procédé, (on peut parler de récurrence ) on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-2} = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{p-1} = 0$.
- Finalement : $\forall i \in [\![0, p-1]\!], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{p-1}(x))$ est libre.

**Remarque :** une rédaction par récurrence est plus souhaitable pour cette méthode.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$

**Autre méthode :** par l'absurde. On suppose que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \ldots, 0)$. On considère alors $i_0$ le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0}$ soit non nul. On a alors $\lambda_{i_0} u^{i_0}(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. On compose alors par $u^{p-1-i_0}$. On obtient alors $\lambda_{i_0} u^{p-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_{i_0} = 0$. Contradiction.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$

L'espace vectoriel $E$ est de dimension 2, donc toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à 2.
La famille libre $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est de cardinal $p$, d'où $p \leqslant 2$. Or $p \geqslant 2$ donc $\boxed{p = 2.}$

**4)** Montrer que $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$.

**Correction :** L'endomorphisme $u$ est nilpotent d'indice $p = 2$, donc $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Puisque $u \neq 0$ n'est pas l'endomorphisme nul, son rang vérifie $\mathrm{rg}(u) \geq 1$.
Puisque $\dim(E) = n = 2$, $\mathrm{rg}(u)$ vaut 1 ou 2.
Supposons par l'absurde que $\mathrm{rg}(u) = 2$, alors $u$ serait bijectif, donc $u^2$ serait également bijectif. Ceci est absurde car $u^2 = 0$. On a donc $\mathrm{rg}(u) = 1$.
Par le théorème du rang, on a de plus $\mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E) = 2$ donc $\dim(\ker(u)) = 2 - 1 = 1$.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \ker(u)$.
On obtient $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces sous-espaces vectoriels sont de même dimension 1,
d'où l'égalité $\boxed{\ker(u) = \mathrm{Im}(u).}$

**5)** Construire une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est égale à $J_2$.

**Correction :** On a montré que $p = 2$ et que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1} = (x, u(x))$ est libre.
La famille $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est libre et de cardinal 2 dans un espace $E$ de dimension 2, donc c'est une base de $E$.
De plus $u(x) = 0x + 1u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 0$ donc la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$ vaut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.$$

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (x, u(x)) \text{ est une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } J_2.}$

**6)** En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

**Correction :** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, d'indice de nilpotence $p$.
Si $p = 1$, alors $A = 0$ donc la trace et le déterminant de $A$ sont nuls.
Si $p \geqslant 2$, on a montré que $p = 2$. Notons $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à $A$. Alors $u$ est nilpotent d'indice 2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que la matrice de $u$ soit $J_2$.
Notons $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\mathcal{B}$, alors $P^{-1}AP = J_2$ et $A$ et $J_2$ sont semblables.
Puisque $A$ et $J_2$ sont semblables, elles ont même trace et même déterminant. Or $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de trace nulle et de déterminant nul, donc $A$ également.
On a montré que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.
Réciproquement : supposons que $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.
Si on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors on a $a + d = 0$, et $ad - bc = 0$. En calculant $A^2$ avec ces hypothèses on trouve $A^2 = 0$.

**Méthode MP :** En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de $A$ vaut

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de $A$ annule $A$ donc $\chi_A(A) = A^2 = 0$ et $A$ est nilpotente.
Ainsi $\boxed{\text{les matrices nilpotentes de } M_2(\mathbb{C}) \text{ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$

**I.B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2**

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ nilpotent d'indice 2 et de rang $r$.

**7)** Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et que $2r \leqslant n$.

**Correction :** L'endomorphisme $u$ est nilpotent d'indice $p = 2$ et de rang $r$.
Puisque $u$ est nilpotent d'indice $p = 2$, on a $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \ker(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)}$. En particulier, on a $r = \mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\ker(u))$. Par le théorème du rang,

$$2r = r + r \leqslant \mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E) = n,$$

donc $\boxed{2r \leq n.}$

**8)** On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de $E$ tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de $E$.

**Correction :** On a $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$ donc $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont de même dimension $r$ et $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = 2r$.
Soit $H$ un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $E$ : $E = H \oplus \ker(u)$. Alors $\dim(H) = n - r = r$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $H$.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\forall i \in [\![1, r]\!]\,, u(e_i) \in \ker(u)$. Montrons que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\ker(u)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ des scalaires tels que $\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$. Par linéarité de $u$ :

$$0 = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r).$$

Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$ appartient à $H \cap \ker(u) = \{0\}$, donc est nul. Or la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre donc pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\lambda_i = 0$.
Finalement, $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre et de cardinal $r$ de $\ker(u)$ qui est de dimension $r$, donc c'est une base de $\ker(u)$.
La décomposition $E = H \oplus \ker(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $H$ et la base $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\ker(u)$, on obtient une base de $E$.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$

**9)** Donner la matrice de $u$ dans cette base.

**Correction :** Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ la base de $E$ obtenue dans la question précédente.
Soit $k \in [\![1, r]\!]$, alors $u$ envoie $e_k$ sur $u(e_k)$.
$u^2 = 0$ donc $u(u(e_k)) = 0$. Chaque famille $(e_k, u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ sur la diagonale.
On en déduit la matrice par blocs de $u$ dans $\mathcal{B}$, qui contient $r$ blocs $J_2$ :

$$\begin{pmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice de $u$ est $\boxed{\mathrm{Diag}(J_2, \dots J_2) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

**10)** On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \ker(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de $E$ et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\ker(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\big)$ est une base de $E$.

**Correction :** On a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ avec $\mathrm{Im}(u) \neq \ker(u)$ donc $\ker(u)$ est de dimension $\dim(\ker(u)) = n-r > r$.
Soit $H$ un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $E$ : $E = H \oplus \ker(u)$. Alors $\dim(H) = r$.
Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $H$.
Comme dans la question **Q8.**, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est encore une famille libre et de cardinal $r$ de $\ker(u)$ qui est de dimension $n-r$ avec $n-r > r$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\ker(u)$, en rajoutant $(n-r) - r = n-2r$ vecteurs de $\ker(u)$, que l'on note $(v_1, \dots, v_{n-2r})$.
La décomposition $E = H \oplus \ker(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1, \dots, e_r)$ de $H$ et la base $(u(e_1), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ de $\ker(u)$, on obtient une base de $E$.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$

**11)** Quelle est la matrice de $u$ dans cette base ?

**Correction :** Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ la base de $E$ obtenue dans la question précédente.
Soit $k \in [\![1, r]\!]$, alors $u$ envoie $e_k$ sur $u(e_k)$.
$u^2 = 0$ donc $u(u(e_k)) = 0$. Chaque famille $(e_k, u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ sur la diagonale.
Les vecteurs $v_1, \dots, v_{n-2r}$ appartiennent à $\ker(u)$ donc $\forall k \in [\![1, n-2r]\!]\,, u(v_k) = 0$.
On en déduit la matrice par blocs de $u$ dans $\mathcal{B}$, qui contient $r$ blocs $J_2$ puis $n-2r$ termes 0 sur la diagonale :

$$\begin{pmatrix} J_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_2 & \\ & & & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Diag}(J_2, \dots J_2, 0_{n-2r}) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

### I.C - Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette partie, $A$ désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**12)** Montrer que, si $A$ est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de $A$.

**Correction : C'est une question de cours !**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \geq 1$. Alors $A^p = 0$ donc le polynôme $P(X) = X^p$ annule $A$.
Par propriété, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Racines}(P) = \{0\}$. De plus, le polynôme caractéristique de $A$ est de degré $n \geq 1$ et scindé sur $\mathbb{C}$ donc possède au moins une racine, donc le spectre de $A$ est non vide et nécessairement $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de } A.}$

**13)** Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

**Correction :** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et diagonalisable.
Alors $A$ est semblable à une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale contient les valeurs propres de $A$. On a montré que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, donc $D = 0$.
Ainsi $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP = D = 0$, d'où $A = P0P^{-1} = 0$ et $A$ est nulle.
Réciproquement, la matrice nulle est clairement diagonalisable et nilpotente.
$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.}}$

**14)** Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à $X^n$.

**Correction :** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Puisque 0 est la seule valeur propre, la seule racine de son polynôme caractéristique $\chi_A$ est 0. De plus $\chi_A$ est unitaire et de degré $n$, donc $\chi_A(X) = X^n$.
Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de $A$ annule $A$ donc $\chi_A(A) = A^n = 0$ et la matrice $A$ est nilpotente (d'indice de nilpotence $p \leq n$).
$\boxed{\text{Une matrice } A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique vaut } \chi_A(X) = X^n.}$

**15)** Montrer la réciproque de la question **12)**.

**Correction :** On suppose que 0 est l'unique valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Les racines du polynôme caractéristique $\chi_A$ sont exactement les valeurs propres de $A$. Donc la seule racine de $\chi_A$ est 0. De plus $\chi_A$ est unitaire et de degré $n$, donc $\chi_A(X) = X^n$.
D'après la question **Q14.**, $A$ est nilpotente.
$\boxed{\text{Si 0 est l'unique valeur propre de } A \in M_n(\mathbb{C}) \text{, alors } A \text{ est nilpotente.}}$

**16)** Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

**Correction :** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire de diagonale nulle. Alors le polynôme caractéristique se calcule aisément : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n$ (la matrice $XI_n - A$ est en effet triangulaire supérieure avec des $X$ sur sa diagonale).
D'après la question **Q14.**, $A$ est nilpotente.
$\boxed{\text{Une matrice triangulaire de } M_n(\mathbb{C}) \text{ de diagonale nulle est nilpotente.}}$
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Son polynôme caractéristique $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{C}$ donc $A$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont semblables donc ont même spectre, or $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, donc les coefficients diagonaux de $T$, qui sont aussi ses valeurs propres, valent 0.
$\boxed{\text{Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$

**17)** Démontrer que, si $A$ est une matrice nilpotente d'indice $p$, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de $X^p$ est un polynôme annulateur de $A$.

**Correction :** Soit $A$ une matrice nilpotente d'indice $p$. Alors $A^p = 0$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme multiple de $X^p$. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = X^pQ(X)$.
Alors $P(A) = A^pQ(A) = 0Q(A) = 0$ donc $P$ est un polynôme annulateur de $A$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente d'indice } p \text{, alors tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ multiple de } X^p \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

On suppose que $P$ est un polynôme annulateur de $A$ nilpotente.

**18)** Démontrer que 0 est racine de $P$.

**Correction :** Soit $A$ une matrice nilpotente et $P$ un polynôme annulateur de $A$.
Puisque $A$ est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.
Puisque $P$ annule $A$, $\{0\} = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Racines}(P)$ : les valeurs propres de $A$ sont des racines de $P$.
En particulier, $\boxed{\text{0 est racine de } P.}$

**19)** On note $m$ la multiplicité de 0 dans $P$, ce qui permet d'écrire $P = X^mQ$ où $Q$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que $P$ est un multiple de $X^p$ dans $\mathbb{C}[X]$.

**Correction :** On a $P(A) = 0$ et $P(X) = X^mQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
Puisque $Q(0) \neq 0$, 0 n'est pas racine de $Q$. On note $d$ le degré de $Q$, $C \neq 0$ son coefficient dominant, $a_k$ ses

racines qui sont toutes non nulles, alors

$$Q(X) = C\prod_{k=1}^{d}(X-a_k). \quad Q(A) = C\prod_{k=1}^{d}(A-a_kI_n).$$

$A$ est nilpotente donc 0 est la seule valeur propre de $A$. Ainsi $\forall\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\lambda$ n'est pas valeur propre de $A$ donc $\ker(A-\lambda I_n) = \{0\}$ et la matrice $(A-\lambda I_n)$ est inversible.
Ainsi pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $a_k \neq 0$ donc $(A - a_kI_n)$ est inversible. Alors $Q(A)$ est un produit de matrices inversibles, donc $\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$
On en déduit alors :

$$0 = P(A) = A^mQ(A) \quad \Rightarrow \quad A^m = 0(Q(A))^{-1} = 0$$

donc $A^m = 0$. Par minimalité de l'indice de nilpotence $p$ de $A$, on a $p \leq m$. Ainsi $\exists l \in \mathbb{N},\ m = p + l$ et

$$P(X) = X^mQ(X) = X^p(X^lQ(X)),$$

donc $\boxed{P \text{ est un multiple de } X^p \text{ dans } \mathbb{C}[X].}$

**I.D - Racines carrées de matrices nilpotentes**

Pour une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de $V$ si $R^2 = V$.
On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

**I.D.1)** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à $A$.

**20)** Calculer la trace et le rang de $A$. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de $A$. Montrer que $A$ est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

**Correction :** Par calcul direct : $\operatorname{tr}(A) = 0$ et, comme les colonnes de $A$ sont toutes proportionnelles, $\operatorname{rg}(A) = 1$.

Par calclul $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ donc son indice de nilpotence est 2.

**21)** Démontrer que $A$ est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice $P$ inversible telle que $A = P\, diag(J_2, J_1)\, P^{-1}$.

**Correction :** $A$ est nilpotente d'indice 2 donc il existe $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que $Ae_1 \neq 0$. On pose ensuite $e_2 = Ae_1$. On peut prendre par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker(A), \quad e_2 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

$A^2 = 0$ donc $Ae_2 = A^2e_1 = 0$ et $e_2 \in \ker(A)$. Or $\ker(A)$ est de dimension 2 donc on peut trouver $e_3$ tel que $(e_2, e_3)$ forme une base de $\ker(A)$. On prend par exemple

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

Posons

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Alors $P$ est inversible (en calculant son déterminant par exemple). Puisque $Ae_1 = e_2, Ae_2 = Ae_3 = 0$, la matrice de l'endomorphisme $u$ canoniquement associé à $A$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ vaut

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Diag}(J_2, J_1).}$$

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note $\rho$ l'endomorphisme canoniquement associé à $R$.

**22)** Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par $\rho$ et que $\rho$ est nilpotent.

**Correction :** Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors $A = Mat_{\mathcal{C}}(u)$ et $R = Mat_{\mathcal{C}}(\rho)$. L'égalité $R^2 = A$ conduit à

$$R^2 = (Mat_{\mathcal{C}}(\rho))^2 = Mat_{\mathcal{C}}(\rho^2) = A = Mat_{\mathcal{C}}(u).$$

Donc $\boxed{\rho^2 = u.}$ Alors $u \circ \rho = \rho^2 \circ \rho = \rho^3 = \rho \circ \rho^2 = \rho \circ u$ donc $\boxed{u \text{ et } \rho \text{ commutent.}}$
Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par $\rho$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. $\exists y \in E,\ x = u(y)$.
Alors $\rho(x) = \rho(u(y)) = u(\rho(y)) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Montrons que $\ker(u)$ est stable par $\rho$. Soit $x \in \ker(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc $u(\rho(x)) = \rho(u(x)) = \rho(0) = 0$ donc $\rho(x) \in \ker(u)$. Donc $\boxed{\ker(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Puisque $A^2 = 0$, on a $u^2 = 0$ d'où $\rho^4 = (\rho^2)^2 = u^2 = 0$. Ainsi $\rho^4 = 0$ et $\boxed{\rho \text{ est nilpotent.}}$

**23)** En déduire l'ensemble des racines carrées de $A$. Indication : on pourra considérer $R' = P^{-1}RP$.

**Correction :** Posons $R' = P^{-1}RP$. Alors

$$(R')^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2PP^{-1}AP = \mathrm{Diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la question **21)** pour les vecteurs $e_1, e_2, e_3$, on a $\mathrm{Im}(u) = Vect(e_2)$ et $\ker(u) = Vect(e_2, e_3)$. Déterminons $\rho(e_1), \rho(e_2), \rho(e_3)$ en utilisant que la matrice de $\rho^2$ vaut $(R')^2$, et que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par $u$. On a en particulier

$$\begin{cases} \rho^2(e_1) &= e_2. \\ \rho^2(e_2) &= 0. \\ \rho^2(e_3) &= 0. \end{cases}$$

- $\mathrm{Im}(u) = Vect(e_2)$ est stable par $\rho$ donc $\exists a \in \mathbb{C}, \rho(e_2) = ae_2$.
  Alors $\rho^2(e_2) = a^2 e_2 = 0$ donc $a = 0$ et $\boxed{\rho(e_2) = 0.}$
- $\ker(u) = Vect(e_2, e_3)$ est stable par $\rho$ donc $u(e_3) \in Vect(e_2, e_3)$ et $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2, \rho(e_3) = ae_2 + be_3$. Alors

  $$\rho^2(e_3) = a\rho(e_2) + b\rho(e_3) = b\rho(e_3) = abe_2 + b^2e_3 = 0.$$

  Puisque $(e_2, e_3)$ est libre, $ab = b^2 = 0$ donc $b = 0$ et $\boxed{\rho(e_3) = ae_2.}$
- $\exists (b,c,d) \in \mathbb{C}^3, \rho(e_1) = be_1 + ce_2 + de_3$. Alors

  $$\rho^2(e_1) = e_2 = b\rho(e_1) + c\rho(e_2) + d\rho(e_3) = b(be_1 + ce_2 + de_3) + dae_2 = b^2e_1 + (bc + da)e_2 + bde_3.$$

  Donc

  $$b^2e_1 + (bc + da - 1)e_2 + bde_3 = 0.$$

  La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est libre donc ces trois coefficients sont nuls.

$$\begin{cases} b^2 &= 0. \\ bc + da - 1 &= 0. \\ bd &= 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ da &= 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ d &= 1/a,\ a \neq 0. \end{cases}$$

On en déduit finalement qu'il existe $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} \rho(e_1) &= ce_2 + (1/a)e_3. \\ \rho(e_2) &= 0. \\ \rho(e_3) &= ae_2. \end{cases} \Rightarrow R' = Mat_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, une telle matrice vérifie bien $(R')^2 = \mathrm{Diag}(J_2, J_1)$.
Donc l'ensemble des racines carrées de $A$ vaut :

$$\boxed{\{\text{racines carrées de } A\} = \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, a \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{C} \right\}}$$

où $P$ est la matrice de passage définie à la question **21)**.

**I.D.2)** On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

**24)** Soit $R$ une solution de cette équation. Donner les valeurs de $R^4$ et $R^6$, puis l'ensemble des solutions de l'équation.

**Correction :** On démontre le résultat préliminaire suivant.
Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p$. Alors $\chi_B(X) = X^n$ donc $B^n = 0$ et $p \leq n$.
Ainsi $\boxed{\text{l'indice de nilpotence } p \text{ d'une matrice nilpotente } B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie } p \leq n.}$

On suppose qu'il existe une solution $R$ vérifiant $R^2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En calculant $(J_3)^2$ et $(J_3)^3$ :

$$R^4 = (R^2)^2 = (J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^6 = (R^2)^3 = (J_3)^3 = 0.$$

On en déduit que $\boxed{R \text{ est nilpotente.}}$ Puisque $R^4 \neq 0$ et $R^6 = 0$, l'indice de nilpotence de $R$ vaut $q = 5$ ou $q = 6$, or $n = 3$ donc $q > n$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{L'équation } R^2 = J_3 \text{ n'a pas de solution.}}$

**I.D.3)** En général, soit $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $p$. On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

**25)** Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

**Correction :** Soit $V \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $p$, avec $2p - 1 > n$.
On suppose qu'il existe une solution $R$ vérifiant $R^2 = V$.
$V$ est nilpotente d'indice $p$ donc $V^p = 0$ et $V^{p-1} \neq 0$. Alors

$$R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$$

donc $R$ est nilpotente. Notons $q$ l'indice de nilpotence de $R$. On a

$$R^{2p-2} = (R^2)^{p-1} = V^{p-1} \neq 0.$$

Donc l'indice de nilpotence de $R$ est strictement supérieur à $2p - 2$ :

$$q \geq 2p - 1 > n$$

donc $q > n$, ce qui est absurde. $\boxed{\text{Si } 2p - 1 > n, \text{ alors l'équation } R^2 = V \text{ n'a pas de solution.}}$

**26)** Pour toute valeur de l'entier $n \geqslant 3$, exhiber une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geqslant 2$ et admettant au moins une racine carrée.

**Correction :** Soit $n \geq 3$. On remarque que

$$(J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

avec $B^2 = 0$ donc $B$ est nilpotente d'indice 2.

Posons $\boxed{V = \mathrm{Diag}\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-3} \right) \in M_n(\mathbb{C}).}$ On a $V^2 = 0$ donc $V$ est nilpotente d'indice $p = 2$. De plus

$$(\mathrm{Diag}\,(J_3, 0_{n-3}))^2 = \mathrm{Diag}\left((J_3)^2, (0_{n-3})^2\right) = V,$$

donc $\boxed{V \text{ admet au moins une racine carrée.}}$

# II Deuxième partie

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

### II.A - Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geqslant 2$. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

**27)** Démontrer que $\text{Im}(u)$ est stable par $u$ et que l'endomorphisme induit par $u$ sur $\text{Im}(u)$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

**Correction :** Soit $x \in \text{Im}(u)$, alors $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $\boxed{\text{Im}(u) \text{ est stable par } u.}$
Notons $v$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $\text{Im}(u)$. $u$ est nilpotent d'indice $p$ donc $u^p = 0$.
Alors $\forall x \in \text{Im}(u), v^p(x) = u^p(x) = 0$ donc $v$ est nilpotent. Notons $q$ l'indice de nilpotence de $v$.
Soit $x \in \text{Im}(u)$. Alors $\exists y \in E,\ x = u(y)$, donc $v^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$ donc $q \leq p-1$.
$u$ est nilpotent d'indice $p$ donc $u^{p-1} \neq 0$. Donc $\exists x \in E, u^{p-1}(x) \neq 0$. Alors $u(x) \in \text{Im}(u)$ et :

$$v^{p-2}(u(x)) = u^{p-2}(u(x)) = u^{p-1}(x) \neq 0,$$

donc $v^{p-2} \neq 0$. Finalement $q \geq p-1$ et $q = p-1$.
$\boxed{\text{L'endomorphisme induit } v \text{ est nilpotent d'indice } q = p-1.}$

**28)** Pour tout vecteur $x$ non nul de $E$, on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ; démontrer que $C_u(x)$ est stable par $u$ et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geqslant 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

**Correction :** Soit $x \in E$ non nul et $C_u(x) = Vect(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.
Montrons que $C_u(x)$ est stable par $u$. Soit $y \in C_u(x)$.
Le vecteur $y$ est combinaison linéaire d'un nombre fini de $u^k(x)$, donc $\exists d \in \mathbb{N}$ tel que $y \in Vect(u^k(x), 0 \leq k \leq d)$. Ainsi $\exists (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tels que

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x). \\ u(y) &= \sum_{k=0}^{d} a_k u(u^k(x)) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1}(x) \in Vect(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = C_u(x). \end{aligned}$$

On a montré que $\forall y \in C_u(x),\ u(y) \in C_u(x)$, donc $\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$
Puisque $u^p = 0$, on a $u^p(x) = 0$ avec $p \geq 1$. Posons $\mathcal{P}_0 = \{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$. On a $p \in \mathcal{P}_0$. $\mathcal{P}_0$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément noté $s(x)$.
Ainsi $\boxed{\text{il existe un plus petit entier } s(x) \geq 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x) = 0.}$

**29)** Démontrer que $\left(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par $u$ sur $C_u(x)$.

**Correction :** On a pour tout $k \geq s(x)$, $u^k(x) = 0$ donc

$$C_u(x) = Vect(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = Vect(u^k(x), 0 \leq k \leq s(x)-1) = Vect(x, u(x), \dots u^{s(x)-1}(x)),$$

ce qui prouve que la famille $(x, u(x), \dots u^{s(x)-1}(x))$ est génératrice de $C_u(x)$.
En appliquant la même technique que dans la question **Q3.**, montrons que cette famille est libre. Pour simplifier les notations, on pose $q = s(x)$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{C}^q$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme $u^{q-1}$ à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme $u^{q-2}$ à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
- $\dots$

- On obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{q-2} = 0$. Alors $\lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{q-1} = 0$.
- Finalement, $\forall i \in [\![0, q-1]\!]$ , $\lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x))$ est libre.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x)) \text{ est libre et génératrice, donc une base de } C_u(x).}$
Dans cette base, par construction, la matrice de l'endomorphisme $v$ induit par $u$ sur $C_u(x)$ vaut :

$$Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{Mat_{\mathcal{B}}(v) = J_{s(x)}.}$$

**30)** Démontrer par récurrence sur $p$ qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de $E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par $u$ sur $\mathrm{Im}(u)$.

**Correction :** Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ l'hypothèse $(H_p)$ suivante :

$(H_p)$ : si $u$ est nilpotent d'indice $p$, alors il existe des vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq t}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

**Initialisation :** $p = 1$. Soit $u$ nilpotent d'indice 1, alors $u = 0$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base quelconque de $E$.
Alors $\forall i, \in [|1, n|], s(x_i) = 1$ donc $C_u(x_i) = \mathrm{Vect}(x_i)$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(x_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} C_u(x_i)$.

**Hérédité** $(H_{p-1}) \Rightarrow (H_p)$ **:** Supposons le résultat vrai au rang $p-1$ et montrons-le au rang $p$.
Soit $u$ nilpotent d'indice $p$. Soit $v = u_{|\Im(u)}$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $\Im(u)$.
Alors $v$ est nilpotent d'indice $p-1$ (question **Q27.**).
Par hypothèse de récurrence appliquée à $v$, il existe des vecteurs $y_1, \ldots, y_t$ de $\mathrm{Im}(u)$ tels que

$$\mathrm{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i).$$

Pour tout $i \in [|1, t|]$, on a $y_i \in \mathrm{Im}(u)$ donc $\exists x_i \in E, y_i = u(x_i)$. Remarquons que $s(x_i) = s(y_i) + 1$. On a :

$$\begin{array}{rcl} C_u(x_i) & = & \mathrm{Vect}(x_i, u(x_i), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_i)). \\ C_u(y_i) & = & \mathrm{Vect}(y_i, \ldots, u^{s(y_i)-1}(y_i)) \quad = \quad \mathrm{Vect}(u(x_i), \ldots, u^{s(y_i)}(x_i)) = \mathrm{Vect}(u(x_i), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_i)). \\ \dim(C_u(x_i)) & = & \dim(C_u(y_i)) + 1. \end{array}$$

Posons $z = \dim(\ker(u))$. Les vecteurs $(u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$ forment une famille libre de cardinal $t$ de $\ker(u)$, que l'on peut compléter en une base de $\ker(u)$ à l'aide de $z - t$ vecteurs :
$(u^{s(x_i)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_t), v_1, \ldots, v_{z-t})$. On a $v_j \in \ker(u)$ donc $s(v_j) = 1$ et $C_u(v_j) = \mathrm{Vect}(v_j)$.
On introduit le sous-espace vectoriel $F$ de $E$ suivant :

$$F = \left( \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{z-t} C_u(v_j) \right).$$

Calculons la dimension de $F$ :

$$\begin{array}{rcl} \dim(F) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} \dim(C_u(x_i)) + \sum_{j=1}^{z-t} \dim(C_u(v_j)) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} (\dim(C_u(y_i)) + 1) + \sum_{j=1}^{z-t} 1 \\ & = & \dim \left( \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i) \right) + t + (z - t) \\ & = & \dim(\Im(u)) + z \\ & = & \mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E), \end{array}$$

en utilisant le théorème du rang. Donc $F = E$, autrement dit Donc $\boxed{E = \left( \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{z-t} C_u(v_j) \right)}$,

ce qui termine la récurrence.

**31)** Donner la matrice de $u$ dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

**Correction :** D'après la question **29)**, la matrice de $u$ dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ vaut :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}).}$$

**II.B - Partitions d'entiers**

On appelle partition de l'entier $n$ toute suite finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ telle que

$$\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n.$$

On note $\Gamma_n$ l'ensemble des partitions de l'entier $n$. Ainsi, $\Gamma_1 = \{(1)\}, \Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}, \Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$.
Soit $u$ un endomorphisme de $E$ nilpotent d'indice $p$ et de rang $r$.

**32)** Montrer qu'il existe une partition $\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de $n$ et une base $\mathscr{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est égale à la matrice $N_\sigma = \text{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k})$.

**Correction :** On utilise la question **29)**. Il existe une décomposition de l'espace $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ adaptée à cette décomposition. Alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}).$$

Quitte à permuter les éléments de la base $\mathcal{B}$ pour réordonner les éléments blocs diagonaux, on peut supposer que

$$s(x_1) \geq s(x_2) \geq \ldots \geq s(x_k).$$

De plus $s(x_1) + s(x_2) + \ldots + s(x_k) = \dim(E) = n$.
Avec les notations précédentes, en posant $\forall i \in [|1, k|], \alpha_i = s(x_i)$ et $\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$,
$\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ vérifiant } Mat_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}).}$

**33)** Soit $\alpha$ un entier naturel non nul. Calculer le rang de $J_\alpha^j$ pour tout entier naturel $j$. En déduire que $J_\alpha$ est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.

**Correction :** Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_\alpha(\mathbb{C}). \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \forall i \in [|1, n-1|], \quad J_\alpha(e_i) & = & e_{i+1}. \\ J_\alpha(e_n) & = & 0. \end{array} \right.$$

En étudiant l'action de $J_\alpha$ sur la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on montre aisément que pour $k \leq n-1$ :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \forall i \in [|1, n-k|], & J_\alpha^k(e_i) & = & e_{i+k}. \\ \forall i \in [|n-k+1, n|], & J_\alpha^k(e_i) & = & 0. \end{array} \right.$$

Donc $J_\alpha^k$ est une matrice contenant $n-k$ termes 1 sur la $k$-ième sous-diagonale et des 0 partout ailleurs.
Ainsi $\text{rg}(J_\alpha) = \alpha - 1$, $\text{rg}(J_\alpha^k) = \alpha - k$ pour $k \leq n-1$ et enfin $\text{rg}(J_\alpha^n) = 0$.

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcll} \text{rg}(J_\alpha^j) & = & \alpha - j & \text{si } 0 \leq j \leq \alpha - 1. \\ \text{rg}(J_\alpha^j) & = & 0 & \text{si } 0 \leq j \geq \alpha. \end{array} \right.}$$

En particulier on a $\text{rg}(J_\alpha^\alpha) = 0$ donc $J_\alpha^\alpha = 0$ et $\text{rg}(J_\alpha^{\alpha-1}) = 1$ donc $J_\alpha^{\alpha-1} \neq 0$.
D'où $\boxed{J_\alpha \text{ est nilpotente d'indice } \alpha.}$

**34)** En déduire la valeur de $\alpha_1$.

**Correction :** $u$ est nilpotent d'indice $p$ donc la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k})$ est aussi nilpotente d'indice $p$.
Puisque $J_\alpha$ est nilpotente d'indice $p$ avec $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_p$, on a $\forall i \in [|1,k|], J_{\alpha_i}^{\alpha_1} = 0$ donc

$$\begin{array}{rcl} N_\sigma^{\alpha_1} = \mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1}) & = & 0. \\ N_\sigma^{\alpha_1-1} = \mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1}, \ldots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1-1}) & \neq & 0 \quad \text{car } J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1} \neq 0. \end{array}$$

Ainsi $N_\sigma$ est nilpotente d'indice $\alpha_1$. Donc $\boxed{\alpha_1 = p.}$

**35)** Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda_j = \{i \in [\![1,k]\!] \mid \alpha_i \geq j\}$. Démontrer que $\mathrm{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j)$.

**Correction :** On note $\Lambda_j = \{i \in [|1,k|], \alpha_i \geq j\}$. On a

$$N_\sigma^j = \mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k})^j = \mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}^j, \ldots, J_{\alpha_k}^j), \quad \text{donc} \quad \mathrm{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j).$$

Si $i \notin \Lambda_j$, alors $\alpha_i < j$ donc $J_{\alpha_i}^j = 0$ et $\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = 0$.
Si $i \in \Lambda_j$, alors $\alpha_i \geq j$ donc $\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \alpha_i - j$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \notin \Lambda_j} 0 + \sum_{i \in \Lambda_j} \mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j). \quad \boxed{\mathrm{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).}$$

**36)** Démontrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'entier $d_j = \mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^j)$ est égal au nombre de blocs $J_{\alpha_i}$ dont la taille $\alpha_i$ est supérieure ou égale à $j$.

**Correction :** D'après la question **Q35.** :

$$d_j = \mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^j) = \mathrm{rg}(N_\sigma^{j-1}) - \mathrm{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).$$

Remarquons que $\Lambda_j \subset \Lambda_{j-1}$. On décompose $\Lambda_{j-1} = \Lambda_j \sqcup (\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j)$ avec

$$\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j = \{i \in [|1,k|] | \alpha_i \geq j-1 \text{ et } \alpha_i < j\} = \{i \in [|1,k|] | \alpha_i = j-1\}.$$

Il vient :

$$\begin{array}{rcl} d_j & = & \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) + \sum_{i \in \Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ & = & \sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i | \alpha_i = j-1} (\alpha_i - (j-1)) \\ & = & \sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i | \alpha_i = j-1} 0 \\ & = & \sum_{i \in \Lambda_j} 1 = \mathrm{Card}(\Lambda_j). \end{array}$$

On a montré que $\boxed{d_j = \mathrm{Card}(\Lambda_j)}$ : $\boxed{d_j \text{ est égal au nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ dont la taille vérifie } \alpha_i \geq j.}$

**37)** Donner la valeur de l'entier $k$, nombre de blocs $J_{\alpha_i}$ intervenant dans $N_\sigma$.

**Correction :** Pour tout bloc $J_{\alpha_i}$, sa taille est supérieure ou égale à 1.
Donc le nombre total $k$ de blocs est égal au nombre de blocs $J_{\alpha_i}$ dont la taille $\alpha_i \geq 1$, d'où $\boxed{k = d_1.}$
Ainsi $k = d_1 = \mathrm{rg}(u^{1-1}) - \mathrm{rg}(u^1) = \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_E) - \mathrm{rg}(u) = n - \mathrm{rg}(u)$. Finalement $\boxed{k = d_1 = n - \mathrm{rg}(u) = \dim(\ker(u)).}$

**38)** Pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, exprimer le nombre de blocs $J_{\alpha_i}$ de taille exactement égale à $j$.

**Correction :** Soit $j \in [|1,n|]$. Le nombre de blocs $J_{\alpha_i}$ de taille exactement égale à $j$ est égal au nombre de blocs de taille $\alpha_i \geq j$ moins le nombre de blocs de taille $\alpha_i \geq j-1$, c'est-à-dire :

$$d_j - d_{j-1} = \Big(\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^j)\Big) - \Big(\mathrm{rg}(u^{j-2}) - \mathrm{rg}(u^{j-1})\Big) = -\,\mathrm{rg}(u^j) + 2\,\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^{j-2}).$$

Le nombre de blocs $J_{\alpha_i}$ de taille exactement égale à $j$ vaut $\boxed{d_j - d_{j-1} = -\,\mathrm{rg}(u^j) + 2\,\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^{j-2}).}$

**39)** On suppose qu'il existe une partition $\sigma'$ de l'entier $n$ et une base $\mathscr{B}'$ de $E$ telles que la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}'$ soit égale à $N_{\sigma'}$. Montrer que $\sigma = \sigma'$.

**Correction :** On suppose qu'il existe deux partitions $\sigma$ et $\sigma'$ de l'entier $n$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = N_{\sigma'}$.
D'après la question **Q38.**, le nombre de blocs de taille exactement égale à $j$ vaut $-\operatorname{rg}(u^j) + 2\operatorname{rg}(u^{j-1}) - \operatorname{rg}(u^{j-2})$ donc ne dépend que de l'endomorphisme $u$.
Pour tout $j \in [|1,n|]$, les matrices $N_\sigma$ et $N_{\sigma'}$ ont même nombre de blocs de taille $j$, ce qui détermine entièrement les deux matrices. Ainsi $N_\sigma = N_{\sigma'}$ et $\boxed{\sigma = \sigma'.}$

**40)** Quel est le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes, toutes de même taille $n$, telles qu'il n'y ait pas dans cet ensemble deux matrices semblables ?

**Correction :** Dans la question **39)**, on a montré que si $N_\sigma$ et $N_{\sigma'}$ représentent le même endomorphisme $u$ dans deux bases différentes, alors $\sigma = \sigma'$.
On en déduit immédiatement que si $\sigma \neq \sigma'$, alors $N_\sigma$ et $N_{\sigma'}$ ne sont pas semblables.
Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{N_\sigma, \sigma \in \Gamma_n\} \subset M_n(\mathbb{C}),$$

alors $\mathcal{E}$ est constitué de matrices nilpotentes, telles qu'il n'existe pas dans $\mathcal{E}$ deux matrices semblables. De plus $\operatorname{Card}(\mathcal{E}_n) = \operatorname{Card}(\Gamma_n)$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. D'après la question **32)**, il existe $\sigma \in \Gamma_n$ telle que $A$ est semblable à $N_\sigma$.
Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ telles qu'il n'y en ait pas deux semblables, alors les matrices de $F$ sont semblables à un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, donc $\operatorname{Card}(\mathcal{F}) \leq \operatorname{Card}(\mathcal{E})$.
**Le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$, ne contenant pas deux matrices semblables, vaut** $\boxed{\textbf{Card}(\Gamma_n).}$
(Autrement dit, le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$ est exactement égal au nombre $\operatorname{Card}(\Gamma_n)$ de partitions de l'entier $n$.)

### II.C - Applications

**41)** Soient $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Déterminer la partition $\sigma$ de l'entier 5 associée à $u$ et donner la matrice $N_\sigma$.

**Correction :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.
Soit $x_1$ le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^5$ :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^2(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^3(x_1) = 0.$$

Donc $s(x_1) = 3$ et $(x_1, u(x_1), u^2(x_1))$ forme une base de $C_u(x_1)$.
Soit $x_2$ le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^5$ :

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u^2(x_2) = 0.$$

Donc $s(x_2) = 2$ et $(x_2, u(x_2))$ forme une base de $C_u(x_2)$.
La famille $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), u^2(x_1), x_2, u(x_2))$ est libre et de cardinal 5, donc forme une base de $\mathbb{C}^5$. La matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$ vaut

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}) = \mathrm{Diag}(J_3, J_2), \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = 3 \geq \alpha_2 = 2, \quad 3+2=5.$$

Donc $\boxed{\sigma = (3,2) \text{ est la partition de l'entier 5 associée à } u, \text{ avec } N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_3, J_2).}$
**Remarque :** ce résultat est cohérent avec la question **Q37.** : le nombre de blocs vaut $k = 2$, or $\mathrm{rg}(u) = 3$ donc $n - \mathrm{rg}(u) = 5 - 3 = 2 = k$.

**42)** À l'aide du résultat de la question 31, démontrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $M$, $2M$ et $M^T$ sont semblables.

**Correction :** Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$.

Par la question **Q30.**, il existe des vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq t}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base adaptée à cette décomposition, alors par la question **Q31.** :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)}).}$$

- **Montrons que $M$ et $2M$ sont semblables.** $2u$ est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $2M$. Soit $i \in [|1,t|]$, alors
$$(2u)^k(x_i) = 2^k u^k(x_i) = 0 \Leftrightarrow u^k(x_i) = 0$$
donc le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k(x_i) = 0$ est le même pour $u$ et $2u$, on le note toujours $s(x_i)$. De plus,
$$C_{2u}(x_i) = \mathrm{Vect}(x_i, 2u(x_i), \dots, 2^{s(x_i)-1} u^{s(x_i)-1}(x_i)) = \mathrm{Vect}(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)) = C_u(x_i).$$
Donc on a la même décomposition de l'espace pour $u$ et pour $2u$ :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) = E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_{2u}(x_i).$$
Il vient alors
$$Mat_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}) = Mat_{\mathcal{B}_1}(2u).$$
Or $M$ est semblable à $Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$, $2M$ est semblable à $Mat_{\mathcal{B}_1}(2u) = Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$, donc par transitivité de la similitude, $\boxed{M \text{ et } 2M \text{ sont semblables.}}$
- **Montrons que $M$ et $M^T$ sont semblables.**
$M$ est semblable à $Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$, donc $M$ est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})$, donc $M^T$ est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T$.
Pour $x \in E$, $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$, avec :
$$Mat_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}.}$$
En inversant l'ordre de la base, c'est-à-dire en posant $\mathcal{B}_{\text{inv}} = (u^{s(x)-1}(x), \dots, u(x), x)$, $\mathcal{B}_{\text{inv}}$ est encore une base de $C_u(x)$, avec :
$$Mat_{\mathcal{B}_{\text{inv}}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{Mat_{\mathcal{B}_{\text{inv}}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}^T.}$$
Soit $\mathcal{B}_2$ la base obtenue en rangeant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$, en sens inverse dans chaque base de $C_u(x_i)$. Plus précisément, on pose donc :
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_1 & = & (x_1, \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \quad x_2, \dots, u^{s(x_2)-1}(x_2), \quad \dots, \quad x_t, \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t)). \\ \mathcal{B}_2 & = & (u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_1, \quad u^{s(x_2)-1}(x_2), \dots, x_2, \quad \dots, \quad u^{s(x_t)-1}(x_t), \dots, x_t). \end{array}$$

D'après ce qui précède :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}_2}(u) = \mathrm{Diag}(J^T_{s(x_1)}, \dots J^T_{s(x_t)}) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T.}$$

Par transitivité, $M$ est semblable à $Mat_{\mathcal{B}_2}(u)$, donc $M$ est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T$, donc $\boxed{M \text{ est semblable à } M^T.}$

**43)** À l'aide du résultat de la question 15, démontrer que si $M$ et $2M$ sont semblables, alors $M$ est nilpotente.

**Correction :** Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $M$ et $2M$ sont semblables.
Alors $M$ et $2M$ ont même polynôme caractéristique. Puisque l'ensemble des valeurs propres d'une matrice est égal aux racines de son polynôme caractéristique, on en déduit que $M$ et $2M$ ont mêmes valeurs propres : $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(2M)$.
On a

$$\ker(M - \lambda I_n) = \ker(2M - 2\lambda I_n),$$

donc $\lambda$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $2\lambda$ est valeur propre de $2M$. Il vient :

$$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(2M) = \{2\lambda, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M$. Supposons par l'absurde que $\lambda \neq 0$. Par une récurrence, on montre que $\forall k \geq 0, 2^k\lambda \in \mathrm{Sp}(2M) = \mathrm{Sp}(M)$. Alors $\mathrm{Sp}(M)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à $n$ et contient l'ensemble infini suivant :

$$\{2^k\lambda, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Sp}(M),$$

ce qui est absurde. Donc $\lambda = 0$ et $0$ est l'unique valeur propre de $M$. D'après la question **Q15.**, $M$ est nilpotente.
On a montré que $\boxed{\text{si } M \text{ et } 2M \text{ sont semblables, alors } M \text{ est nilpotente.}}$

**44)** $Y_{n,1}$ est le nombre de partitions dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leq 1$.
Puisque $\alpha_1$ est le plus grand terme, tous les autres termes valent 1 et on obtient une unique partition $(1, 1, \dots, 1)$ de $n$ (avec $k = n$). Par suite, $\boxed{\forall n \geq 1, \quad y_{n,1} = 1.}$
Remarquons pour la suite que $y_{0,0} = 1$ par convention mais pour $n \geq 1, y_{n,0} = 0$.

### II.D - Un algorithme de calcul du nombre de partitions de $n$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $Y_{n,j}$ l'ensemble des partitions de $n$ dont le premier terme $\alpha_1$ est inférieur ou égal à $j$ et $y_{n,j}$ le cardinal de $Y_{n,j}$ ; on pose $y_{0,0} = 1$.

**45)** Calculer $y_{n,1}$.

**Correction :** $Y_{n,1}$ est le nombre de partitions dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leq 1$.
Puisque $\alpha_1$ est le plus grand terme, tous les autres termes valent 1 et on obtient une unique partition $(1, 1, \dots, 1)$ de $n$ (avec $k = n$). Par suite, $\boxed{\forall n \geq 1, \quad y_{n,1} = 1.}$
Remarquons pour la suite que $y_{0,0} = 1$ par convention mais pour $n \geq 1, y_{n,0} = 0$.

On se propose de montrer que, si $2 \leqslant j \leqslant n$, alors $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$.

**46)** Démontrer que cette égalité est vraie pour $j = n$.

**Correction :** Pour $j = n$, le membre de droite de la formule vaut :

$$y_{n,n-1} + y_{n-n,\min(j,n-j)} = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + 1.$$

Or

$$Y_{n,n} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leq n\} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leq n-1\} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = n\} = Y_{n,n-1} \sqcup \{(n)\},$$

car il existe une seule partition, la partition $(n)$, telle que $\alpha_1 = n$.
Ainsi $\mathrm{Card}(Y_{n,n}) = \mathrm{Card}(Y_{n,n-1}) + 1$ donc $\boxed{\forall n \geq 2, \quad y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1.}$ L'égalité est vraie pour $j = n$.

**47)** Pour $j < n$, vérifier que $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$. Conclure.

**Correction :** Soit $j < n$.

$$Y_{n,j} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \le j\} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \le j-1\} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\} = Y_{n,j-1} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}.$$

En passant au cardinal,

$$y_{n,j} = y_{n,j-1} + \mathrm{Card}(\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}).$$

Soit $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ dans l'ensemble $\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}$. Alors $\alpha_1 = j$ et $j \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_k$ avec $\alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n - \alpha_1 = n - j$, donc $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in Y_{n-j,j}$. Ainsi

$$\mathrm{Card}(\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}) = \mathrm{Card}(Y_{n-j,j}) = y_{n-j,j}.$$

On en déduit que $\boxed{\forall j < n, \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}.}$
Si $j \le n-j$, alors $\min(n-j, j) = j$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Si $j > n-j$, alors $\min(n-j, j) = n-j$ et $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j}$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Dans les deux cas, $\forall j < n, \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Avec la question **Q45.**, on a $\boxed{\forall j \in [|2, n|], \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}.}$

**48)** Calculer les $y_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 5$ en présentant les résultats sous la forme d'une tableau.

**Correction :** Calculons les $y_{n,j}$ pour $1 \le j \le n \le 5$.
Puisque $y_{n,1} = 1$, on remplit la colonne $j = 1$ de termes 1.
Ensuite, on utilise la relation de récurrence $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$.
Par exemple, $y_{2,2} = y_{2,1} + 1 = 1 + 1 = 2$.

| | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ | $j=4$ | $j=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | 1 | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | | | |
| $n=3$ | 1 | 2 | 3 | | |
| $n=4$ | 1 | 3 | 4 | 5 | |
| $n=5$ | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 |

**49)** Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie $y_{n,n}$.

**Correction :** On propose la fonction récursive Python `calculY(n,j)` qui calcule les $y_{n,j}$, et la fonction Python `calculY2(n)` qui calcule les $y_{n,n}$ en appelant la fonction `calculY(n,j)` :

```
def calculY(n,j) :
    if n==0 :
        if j==0 :
            return 1
        else :
            return 0
    elif n >= 1 :
        if j==0 :
            return 0
        elif j==1 :
            return 1
        elif j>= 2 :
            return calculY(n,j-1) + calculY(n-j, min(j,n-j))

def calculY2(n):
    return calculY(n,n)

for n in range (1,6) :
    print('Ligne ',n)
    for j in range(1,n+1) :
        print('n=',n,'j=',j,'   y=',calculY(n,j))
```

**50)** Comparer ce résultat à celui de la question 40.

**Correction :** Ce résultat fait référence à $y_{n,n}$.
$Y_{n,n}$ est l'ensemble des partitions de $n$ dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leq n$, ce qui est le cas pour toutes les partitions de $n$.
Donc $\boxed{y_{n,n} = \mathrm{Card}(\Gamma_n)}$ est le nombre de partitions de l'entier $n$, c'est aussi le résultat de la question **Q40.**, le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$.
Vérifions par exemple qu'il existe $y_{5,5} = 7$ partitions de l'entier 5 :

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+1+1+1 && \text{(partition 1)} \\ &= 2+1+1+1 && \text{(partition 2)} \\ &= 2+2+1 && \text{(partition 3)} \\ &= 3+1+1 && \text{(partition 4)} \\ &= 3+2 && \text{(partition 5)} \\ &= 4+1 && \text{(partition 6)} \\ &= 5 && \text{(partition 7).} \end{aligned}$$