Colle n° 20 : Semaine du 24 mars 2025

Equations différentielles linéaires

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limite en conséquence la technicité des exercices sur ce point. On peut en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter les courbes intégrales.

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	**Capacités & Commentaires**
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$ Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t), \quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires. Exemples de recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathcal{L}(E)$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a\,(x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Questions de cours : Rien cette semaine