Colle n° 19 : Semaine du 17 mars 2025

Régularité des intégrales à paramètre

Reprise du programme précédent.

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue ; — pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux ; — il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x, \cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t) \,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ; — pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ; — pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t) \,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques offre l'occasion d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire, ou, ultérieurement, de la géométrie des espaces euclidiens.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique mettant l'accent sur la notion d'idéal.

a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \Longleftrightarrow d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.

c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.

d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.

Questions de cours : Rien cette semaine