# **Colle n° 18** : Semaine du 11 mars 2024

| | |
|---|---|
| **a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles** | |
| Dérivée de l'application $f$ au point $a$ selon le vecteur $v$.<br><br>Dérivées partielles dans une base. | Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.<br>Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.<br>Lorsqu'une base de $E$ est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$. |
| **b) Différentielle** | |
| Application différentiable au point $a$.<br><br>Si $f$ est différentiable en $a$, alors $f$ est continue en $a$ et dérivable en $a$ selon tout vecteur. | Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.<br>Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, $f$ est différentiable en $a$ si et seulement si toutes les $f_i$ le sont. |
| Différentielle de $f$ en $a$, encore appelée application linéaire tangente à $f$ en $a$. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a) \cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$. | Notation $\mathrm{d}f(a)$. |
| Application différentiable sur un ouvert $\Omega$. Différentielle sur $\Omega$.<br>Cas particuliers : application constante, application linéaire. | Notation $\mathrm{d}f$. |
| Lien entre différentielle et dérivées partielles.<br><br>Cas des fonctions d'une variable : si $\Omega$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de $f$ en $a$ équivaut à la dérivabilité de $f$ en $a$ ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$. | Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de $f$ en $a$ est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques. |
| Si l'espace $E$ est euclidien, gradient en $a$ d'une application numérique différentiable en $a$. Expression du gradient en base orthonormée. | Notation $\nabla f(a)$.<br>Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de $f$ en $a$ est maximale. |
| **c) Opérations sur les applications différentiables** | |
| Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \dots, f_p)$ où $M$ est multilinéaire et où $f_1, \dots, f_p$ sont des applications différentiables.<br>Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables. | |
| Dérivée le long d'un arc : si $\gamma$ est une application définie sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, dérivable en $t$, si $f$ est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.<br>Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables. | Interprétation géométrique en termes de tangentes.<br>Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$.<br>Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.<br>Dérivées partielles de $$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$$ |
| **d) Applications de classe $\mathcal{C}^1$** | |
| Une application $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega$ si elle est différentiable sur $\Omega$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $\Omega$. | |
| L'application $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de $E$ existent en tout point de $\Omega$ et sont continues sur $\Omega$. | La démonstration n'est pas exigible. |
| Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$. | |
| Si $f$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega$ dans $F$, si $\gamma$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\Omega$, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t.$$ | Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0,1]$. |
| Si $\Omega$ est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur $\Omega$. | Démonstration pour $\Omega$ convexe. |
| **e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie** | |
| Si $X$ est une partie de $E$ et $x$ un point de $X$, un vecteur $v$ de $E$ est tangent à $X$ en $x$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans $X$, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.<br>Si $g$ est une fonction numérique définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega$ de $E$, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$. | Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à $X$ en $x$.<br>Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.<br>La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme.<br>Traduction en termes de gradient si $E$ est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.<br>Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation. |
| **f) Optimisation : étude au premier ordre** | |
| Point critique d'une application différentiable.<br>Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur. | Exemples de recherches d'extremums globaux. |
| Si $f$ est une fonction numérique définie sur l'ouvert $\Omega$, si $X$ est une partie de $\Omega$, si la restriction de $f$ à $X$ admet un extremum local en $x$ et si $f$ est différentiable en $x$, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à $X$ en $x$. | |
| Théorème d'optimisation sous une contrainte : si $f$ et $g$ sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega$ de $E$, si $X$ est l'ensemble des zéros de $g$, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de $f$ à $X$ admet un extremum local en $x$, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$. | Si $E$ est euclidien, traduction en termes de gradient.<br>Exemples de recherches d'extremums sous contrainte. |
| **g) Applications de classe $\mathcal{C}^k$** | |
| Dérivées partielles d'ordre $k$ d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. | Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$ , $\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$ , $\partial_{j_1, \dots, j_k} f$. |
| Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre $k$ existent et sont continues sur $\Omega$. | La notion de différentielle seconde est hors programme. |
| Théorème de Schwarz. | La démonstration n'est pas exigible. |
| Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$. | Les démonstrations ne sont pas exigibles.<br>Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre. |

| **h) Optimisation : étude au second ordre** | |
|---|---|
| Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. | Notation $H_f(x)$. |
| Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\|h\|^2),$$ $$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2).$$ | La démonstration n'est pas exigible. |
| Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $f$ admet un minimum local en $x$, alors $x$ est point critique de $f$ et $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. | Adaptation au cas d'un maximum local. |
| Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $x$ est point critique de $f$ et si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $f$ atteint un minimum local strict en $x$. | Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n=2$ (trace et déterminant). |

**Questions de cours :**

- Si $f$ est différentiable en $a$ alors elle admet une dérivée en $a$ suivant tout vecteur. On a de plus $\forall v \in E \quad df(a)(v) = df(a)\cdot v = D_v f(a)$
- Composée de deux fonctions différentiables, $d(g\circ f)(a) = dg(f(a))\circ df(a)$
- Ligne de niveau et gradient : orthogonalité entre vecteurs tangents et gradient
- Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ mais pas de classe $\mathscr{C}^2$.