Colle n° 16 : Semaine du 24 février 2025

Endomorphismes d'espaces euclidiens

a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint. Matrice de l'adjoint en base orthonormée. Si le sous-espace F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .	Notation u^* .
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^t A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes. Groupe orthogonal. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables. Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$. Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$. Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E , égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes. Exemples : symétrie orthogonale, réflexion. Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$. Groupe orthogonal. Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte. Groupe spécial orthogonal.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ». Notation $O(E)$. Notation $SO(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau. Classification des isométries d'un plan euclidien.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs. Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie en base orthonormée. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation matricielle. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.
f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E , alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u .	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$. Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Questions de cours :

- Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée
- Caractérisation des isométries vectorielles
- le polynôme d'une matrice symétrique réelle est scindé dans $\mathbb{R}$.
- Théorème spectral
- Caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs resp définis positifs.
- Tout ce qui vous paraît intéressant