

Colle n° 15 : Semaine du 29 janvier 2024

Variables aléatoires discrètes

e) Variables aléatoires discrètes	
Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathcal{A}$. Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X. <i>Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.</i> La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Notation $X \sim Y$. Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A. Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X. La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$. La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé. Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes. Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes. Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi. Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Extension au cas de plus de deux variables. Extension au cas de plus de deux coalitions. La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
g) Lois usuelles	
Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p. Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathcal{G}(p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini. Notations $\mathcal{P}(\lambda)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$ Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x) P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$. Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Si $X \leq Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$. Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $E(XY) = E(X) E(Y).$	Notation $E(X)$. Notation $E(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1. Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle. Extension au cas de n variables aléatoires.
i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Si $E(X^2) < +\infty$, X est d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$. Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X. Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorréliées.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2. Cas d'égalité. Notations $V(X)$, $\sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle. Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left \frac{S_n}{n} - m\right \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$ où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$ Détermination de la loi de X par G_X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$. Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X. La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $E(X)$ et $V(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Questions de cours :

- Espérance et variance d'une loi usuelle (géométrique ou de Poisson)
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres