Colle n° 13 : Semaine du 15 janvier 2024

Probabilté

— la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;
— la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;
— les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.

b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité.	
Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A \,\|\, B) = P(A)$.
Famille d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	

d) Espaces probabilisés discrets	
Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Questions de cours : rien cette semaine