Colle n° 11 : Semaine du 9 décembre 2024

Suites et séries de fonctions

Reprise du programme précédent

Dénombrabilité, famille sommable

a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable. La démonstration n'est pas exigible.
e) Familles sommables de nombres réels positifs	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$. Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.	
Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.	La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.	On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Opérations : somme, multiplication par un réel positif.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	La démonstration est hors programme.
f) Familles sommables de nombres complexes	
La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\left\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \right\rvert \leqslant \varepsilon$. Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini.	La démonstration est hors programme.
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$	Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Questions de cours :

— un exercice de la banque CCINP (cf TD 10)