

Colle n° 09 : Semaine du 25 novembre 2024

## Topologie des espaces vectoriels normés

Reprise du programme précédent, sans oublier la convexité par arcs

## Fonctions à valeurs vectorielles

### Programme officiel

Ce chapitre poursuit deux objectifs :

- étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;
  - fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel ;
- Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans un espace normé de dimension finie  $E$ .

Contenus	Capacités & Commentaires
<b>a) Dérivabilité en un point</b>	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction par les coordonnées dans une base de $E$ .
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
<b>b) Opérations sur les fonctions dérivables</b>	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$ , où $L$ est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$ , où $B$ est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$ , où $M$ est multilinéaire. Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où $\varphi$ est une fonction réelle de variable réelle et $f$ une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathcal{C}^k$ . Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$ .	Cas du produit scalaire, du déterminant
<b>c) Intégration sur un segment</b>	
Intégrale d'une fonction $f$ continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$ . Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour $L$ linéaire, intégrale de $L(f)$ . Inégalité $\left\  \int_a^b f \right\  \leq \int_a^b \ f\ $ Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Notations $\int_{[a,b]} f, \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$
<b>e) Intégrale fonction de sa borne supérieure</b>	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour $f$ continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ .	
<b>f) Formules de Taylor</b>	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ . Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ .	

**Questions de cours :** rien cette semaine mais possibilité toujours de commencer par un exercice de la banque CCINP