

Colle n°8 : Semaine du 20 novembre 2023

## Fonctions à valeurs vectorielles

Reprise du programme précédent

## Réduction

<b>b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée</b>	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est fini, et de cardinal au plus $n$ . Si deux endomorphismes $u$ et $v$ commutent, tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$ . Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	En dimension finie, traduction matricielle. Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ . La notion de valeur spectrale est hors programme. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.  Le noyau et l'image de $u$ sont stables par $v$ . Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$ . Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}'$ .
<b>g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée</b>	
Pour $u$ dans $\mathcal{L}(E)$ , morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ . Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de $u$ . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$ . Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Si $d$ est le degré du polynôme minimal de $u$ , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ . Si $P$ annule $u$ , toute valeur propre de $u$ est racine de $P$ . Les racines de $\pi_u$ dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de $u$ .	Traduction matricielle.  Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$ .  Si $u(x) = \lambda x$ , alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .
<b>h) Lemme de décomposition des noyaux</b>	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à $P$ , alors :	
$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u)).$	
<b>c) Polynôme caractéristique</b>	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.  Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est majorée par la multiplicité de $\lambda$ .	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations $\chi_A, \chi_u$ . Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$ . Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

## Questions de cours ou exercices de début de colle :

- La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe
- Si deux endomorphismes commutent les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre
- Si  $d$  est le degré du polynôme minimal de  $u$ , alors la famille  $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .
- Tout ce qui vous paraît intéressant.