Colle n° 07 : Semaine du 12 novembre 2024

Topologie des espaces vectoriels normés

Contenus	**Commentaires**
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Normes $\\|\ \\|_1$, $\\|\ \\|_2$, $\\|\ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\|\ \\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge
c) Comparaison de normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.
g) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

Questions de cours :

— Les normes 1, 2 et infinie de $\mathbb{R}^n$, ainsi que leurs comparaisons
— Les normes 1, 2 et infinie de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, ainsi que leurs comparaisons
— Caractérisation séquentielle de l'adhérence
— Un compact est un fermé borné
— toute question intéressante
— ou un exercice de la banque CCINP : 01, 13, 34, 37, 44 (cf fichier TD06)